Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein 09.12.2013

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2013/14 — Blatt 8

Abgabe: Montag, den 16. Dezember, vor der Vorlesung

Die Übungsblätter finden Sie auch unter
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen und vereinfachen Sie falls möglich das Ergebnis.

a) $f(x) = x^3 \sin x$

b) $g(x) = \dfrac{x^3 + 5}{x^2 + 1}$

c) $h(x) = \cosh x$

d) $u(x) = \dfrac{\ln x + \sin x}{x}$

e) $v(x) = \big(x + a\big)^2$ mit $a \in \mathbb{R}$

f) $w(x) = \ln\big(\dfrac{e^x - 1}{e^x}\big)$

g) $k(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

h) $l(x) = a^x$ mit $a > 0$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{falls } x \le 2, \\ bx^3 + 4 & \text{falls } x > 2. \end{cases}$$

Berechnen Sie für $x < 2$ und für $x > 2$ die Ableitung $f'(x)$. Bestimmen Sie a, $b \in \mathbb{R}$ so, dass f und f' auf $\mathbb{R}$ stetig sind.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Gesucht ist eine approximative Lösung $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $x^3 + 3x = 10$. Betrachten Sie dazu die Funktion $f(x) := x^3 + 3x - 10$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion f mindestens eine Nullstelle im Intervall $I_1 := [1, 2]$ hat.

b) Wir möchten schrittweise die Lage der Nullstelle weiter eingrenzen, indem wir die Intervalle halbieren und jeweils die Hälfte des Intervalles auswählen, in dem sich die Nullstelle befindet (vgl. Anwesenheitsaufgabe 1). Gehen Sie dazu wie folgt vor:

   (i) Berechnen Sie $f(\frac{3}{2})$.

   (ii) Entscheiden Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, ob die Nullstelle in $[1, \frac{3}{2}]$ oder in $[\frac{3}{2}, 2]$ liegt.

   (iii) Definieren Sie das Intervall, für das Sie sich in (ii) entschieden haben als neues Intervall I_2.

   (iv) Halbieren Sie nun I_2 und wiederholen Sie entsprechend die Schritte (i)-(iii), um I_3 und anschließend I_4 zu berechnen.

Aufgabe 4 (Michaelis-Menten Gleichung) **4 Punkte**

Bei einer Enzymkatalyse wird die Reaktionsgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Konzentration vereinfacht durch die Michaelis-Menten Gleichung beschrieben:

$$v(s) = \frac{v_{\max} s}{K_m + s}. \qquad (*)$$

Hierbei bezeichnet $s > 0$ die Konzentration, $v_{\max}$ die maximale Reaktionsgeschwindigkeit und K_m die Michaeliskonstante des Enzyms.

a) Nehmen Sie an, dass $v_{\max} > 0$ und $K_m > 0$ gegeben sind und bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von $v(s)$ für $s \to \infty$.
Skizzieren Sie $v(s)$.

b) Invertieren Sie $(*)$ und leiten Sie daraus eine Gleichung $y = mx + c$ mit $y = \frac{1}{v(s)}$ und $x = \frac{1}{s}$ her.

c) Sie möchten nun experimentell $v_{\max}$ und K_m für ein bestimmtes Enzym bestimmen. Dazu führen Sie drei Experimente durch, bei denen Sie bei drei verschiedenen Konzentrationen s_1, s_2 und s_3 jeweils die Reaktionsgeschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 bestimmen. Nun tragen Sie die invertierten Wertepaare $(\frac{1}{s_1}, \frac{1}{v_1})$, $(\frac{1}{s_2}, \frac{1}{v_2})$ und $(\frac{1}{s_3}, \frac{1}{v_3})$ in ein Diagramm ein und verbinden die drei Punkte. Aus Teil b) wissen Sie, dass dabei eine Gerade entsteht.
Erklären Sie, wie man aus dieser Geraden K_m und $v_{\max}$ ablesen kann.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 8

Aufgabe 1:
Gegeben ist die Funktion $f(x) := x^3 + x + 1$.

a) Berechnen Sie $f(-1)$ und $f(0)$. Begründen Sie dann mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f im Intervall $[-1, 0]$ eine Nullstelle besitzt.

b) Berechnen Sie $f(-\frac{1}{2})$. Entscheiden Sie nun, ob die Nullstelle im Intervall $[-1, -\frac{1}{2}]$ oder in $[-\frac{1}{2}, 0]$ liegt.

Aufgabe 2:
Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) := e^{\cos(2x+x^2)}$,

b) $g(x) := \sqrt{x}$,

c) $h(x) := 2^x$, Tipp: $2^x = e^{x \ln(2)}$

d) $u(x) = \frac{x}{x^5 - 1}$

Hinweis: Blatt 9 wird bereits am Fr, 13.12. ausgegeben. Abgabe ist am Fr, 20.12., spätestens nach der Vorlesung. Blatt 10 wird am 20.12. ausgegeben und muss am Mo, 13.01. abgegeben werden.