Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein 13.12.2013

**Mathematik I für Naturwissenschaftler**

WS 2013/14 — Blatt 9

**Abgabe: Freitag, den 20. Dezember, NACH der Vorlesung**

Die Übungsblätter finden Sie auch unter

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

**Aufgabe 1:** **4 Punkte**

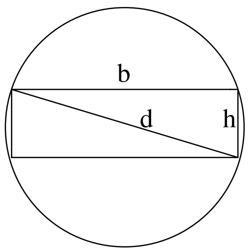
Ziel dieser Aufgabe ist es, eine approximative Lösung der Gleichung $e^x - 1 = \cos x$ zu finden.

a) Definieren Sie eine geeignete Hilfsfunktion, mit der Sie das Problem in ein äquivalentes Nullstellenproblem umschreiben können.

b) Lösen Sie das Nullstellenproblem mit dem Newton-Verfahren. Beginnen Sie dazu bei $x_0 = 1$ und runden Sie Ihre Zwischenergebnisse $x_i$ auf 5 Stellen genau. Berechnen Sie $x_1$ bis $x_4$ und testen Sie $x_4$ in der Ausgangsgleichung. Überzeugen Sie sich anschließend anhand einer Skizze davon, dass $x_0 = 1$ ein sinnvoller Startwert ist. Denken Sie daran, Ihren Taschenrechner auf Bogenmaß einzustellen!

**Aufgabe 2:** **4 Punkte**

Aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt so herausgeschnitten werden, dass sein Widerstandsmoment $W = \frac{1}{6}bh^2$ den größtmöglichen Wert annimmt (d.h. der Balken soll so stabil wie möglich sein). Berechnen Sie $b$ und $h$ in Abhängigkeit von $d$ so, dass $W$ maximal wird.




b: Breite des Balkens, h: Höhe des Balkens, d: Durchmesser des Baumstamms

**Tipp:** Finden Sie anhand der Skizze einen Zusammenhang zwischen $b$, $h$ und $d$.

**Aufgabe 3:** **4 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2^x}{2^x - 2^2}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$$

**Aufgabe 4:** **4 Punkte**

Die Molwärme eines zweiatomigen Gases ist bei festem Volumen als Funktion der absoluten Temperatur $T$ gegeben durch

$$c(T) = R\frac{\left(T_0/T\right)^2 e^{\frac{T_0}{T}}}{\left(e^{\frac{T_0}{T}} - 1\right)^2}.$$

Hierbei ist $R$ die ideale Gaskonstante und $T_0$ die charakteristische Temperatur. Berechnen Sie $\lim\limits_{T\to 0} c(T)$ und $\lim\limits_{T\to\infty} c(T)$.

**Anleitung:** Zur Vereinfachung der Rechnung setzt man $x := \frac{T_0}{T}$. Damit kann man $c(T)$ umschreiben:

$$c(T) = R\frac{\left(T_0/T\right)^2 e^{\frac{T_0}{T}}}{\left(e^{\frac{T_0}{T}} - 1\right)^2} = R\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

Für $T \to 0$ gilt $x \to \infty$ und für $T \to \infty$ gilt $x \to 0$, d.h. es gilt

$$\lim_{T\to 0} c(T) = \lim_{x\to\infty} R\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$$

und

$$\lim_{T\to\infty} c(T) = \lim_{x\to 0} R\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

## Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 9

**Aufgabe 1:** In Übungsaufgabe 3 von Blatt 8 haben Sie die Lage der Nullstelle der Funktion $f(x) := x^3+3x-10$ mit Hilfe eines Intervallschachtelungsverfahrens bestimmt. Lösen Sie nun das gleiche Problem mit dem Newtonverfahren. Beginnen Sie dabei mit dem Startwert $x_0 = 2$ und berechnen Sie $x_1$ bis $x_4$ und runden Sie das Ergebnis auf 5 Stellen nach dem Komma.

**Aufgabe 2:**
Untersuchen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{e^x-1}$ und $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2+3x}$.