Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein 10.07.2014

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2014 — Blatt 10

Abgabe: Donnerstag, 17.07., in der Pause

Die Übungsblätter finden Sie auch unter http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

Aufgabe 1: **4 Punkte**

In einem Stromkreis sind eine zeitabhängige Spannungsquelle $U(t)$, ein konstanter Widerstand R und eine konstante Induktivität L hintereinandergeschaltet. Die Stromstärke $I(t)$ erfüllt dann die Differentialgleichung

$$LI'(t) + RI(t) = U(t), \qquad I(0) = I_0.$$

Berechnen Sie $I(t)$ mit Hilfe der Lösungsformel und berechnen Sie das darin enthaltene Integral explizit im Fall konstanter Spannung $U(t) = U_0$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

In einem Infektionsmodell bezeichne $I(t)$ den Anteil der zum Zeitpunkt t infizierten Individuen in einer Population (d.h. $0 \leq I(t) \leq 1$). Wir nehmen an, dass sich die Änderungsrate $I'(t)$ mit einem Proportionalitätsfaktor a proportional der Anzahl der Kontakte zwischen Infizierten und Nichtinfizierten $I(t)(1 - I(t))$ verhält. Zu Beobachtungsbeginn beträgt der Anteil der Infizierten $I(0) = I_0$. Formulieren Sie das zugehörige Anfangswertproblem und lösen Sie es mit den Ergebnissen aus der Vorlesung.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Betrachten Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u'' + u' - u = 0.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Gleichung und dessen Nullstellen.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung.

c) Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung mit $u(0) = u'(0) = 1$.

d) Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung mit $u(0) = 1$ und $u'(0) = 0$.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Gegeben ist die nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung $u' = u^2 - u - 2$.

a) Bestimmen Sie die stationären Punkte $\overline{u}_1$ und $\overline{u}_2$ der Differentialgleichung und entscheiden Sie mit Hilfe des Satzes aus der Vorlesung, ob die Punkte anziehend stabil oder instabil sind.

b) Zeichnen Sie ein Richtungsfeld und zeichnen Sie mögliche Lösungskurven ein, um Ihre Antwort zu begründen.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Gegeben ist die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + ay' + by = 0.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Exponentialansatzes $y(t) = e^{\lambda t}$, dass die Differentialgleichung für den Fall $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = 0$ die Lösung $y_1(t) = e^{-\frac{a}{2}t}$ besitzt.

b) Rechnen Sie nach, dass $y_2(t) = te^{-\frac{a}{2}t}$ im Fall $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = 0$ ebenfalls eine Lösung ist.

c) Bestimmen Sie für die allgemeine Lösung

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

die Faktoren $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ so, dass y durch den Punkt $(0, 1)$ geht und dort die Steigung -1 hat.

Dieses Blatt wird mit 16 Punkten gewertet, es können also 4 Bonuspunkte erzielt werden.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 10

Aufgabe 1:

a) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Lösungsformel:

$$u'(t) + \frac{u(t)}{t} = \frac{1}{t}, \quad u(1) = 1.$$

Bemerkung: Beachten Sie $t_0 \neq 0$!

b) Überzeugen Sie sich durch direktes Nachrechnen davon, dass die Formel wieder eine Lösung liefert. Dazu gehört immer auch der Anfangswert!

Im Fall $t_0 \neq 0$ lautet die Lösungsformel für die lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangswert $u(t_0) = u_0$:

$$u(t) = e^{-A(t)} \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(\tau)} b(\tau)\, d\tau + u_0 e^{-A(t)}, \qquad t \geq t_0,$$

wobei $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau$. Für $t_0 = 0$ ist das gerade die Formel aus der Vorlesung.

Aufgabe 2:

a) Geben Sie Lösungen der Differentialgleichung $f'' - f = 0$ an, indem Sie zunächst die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmen.

b) Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung $f'' - f = 0$ mit $f(0) = 1,\ f'(0) = 3$.

c) Geben Sie alle reellwertigen Lösungen der Differentialgleichung $f'' + f = 0$ an.