Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein 17.07.2014

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2014 — Blatt 11

Abgabe: Donnerstag, 24.07., in der Pause

Die Übungsblätter finden Sie auch unter http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Betrachten Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1' &= 3u_1 + 2u_2 \\ u_2' &= -3u_1 - 2,5u_2 \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie das System in vektorieller Schreibweise $\vec{u}' = A\vec{u}$.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung $\vec{u}$ des Systems.

c) Finden Sie eine Lösung $\vec{u}$ mit $\vec{u}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 2,5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Betrachten Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 + u_2 \\ u_2' &= \frac{1}{4}u_1 + u_2 \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie das System in vektorieller Schreibweise $\vec{u}' = A\vec{u}$.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung $\vec{u}$ des Systems.

c) Finden Sie eine Lösung $\vec{u}$ mit $\vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Rechnen Sie nach, dass die Funktion

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{3t} + e^{2t} \\ 2e^{3t} - e^{2t} \end{pmatrix}$$

das System

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_1(t) - u_2(t) \\ u_2'(t) &= 2u_1(t) + 4u_2(t) \end{aligned}$$

mit Anfangswert $\vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ löst.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

a) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) + y'(t) + \frac{1}{4}y(t) = 0$$

an. Tipp: Blatt 10, Aufgabe 5

b) Bestimmen Sie die Konstanten c_1 und c_2 so, dass die Anfangswerte $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ angenommen werden. **Teil c) auf der Rückseite!**

c) Bestimmen Sie die Nullstellen und das asymptotische Verhalten ($t \to \infty$) der Funktion aus Teil b) und fertigen Sie für $t \geq 0$ eine Skizze von $y(t)$ an.

Zusatzaufgabe: **4 Zusatzpunkte**

Auch lineare Differentialgleichungen dritter Ordnung lassen sich mit dem Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmen.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'''(t) - y''(t) - 2y'(t) = 0.$$

b) Bestimmen Sie die Konstanten aus Teil a) so, dass die Anfangswerte $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 1$ angenommen werden.

Zusatzaufgabe: **4 Zusatzpunkte**

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0,$$

mit a, b, $c \in \mathbb{R}$. Nehmen Sie an, dass bereits zwei verschiedene Lösungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ der Differentialgleichung bekannt sind. Beweisen Sie, dass dann auch $u(t) := u_1(t)+u_2(t)$ die Differentialgleichung löst.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 11

Aufgabe 1:
Betrachten Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1' &= 3u_1 + 2u_2 \\ u_2' &= -5u_1 - 4u_2 \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie das System in vektorieller Schreibweise $\vec{u}' = A\vec{u}$.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung $\vec{u}$ des Systems, indem Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A berechnen.

c) Finden Sie eine Lösung $\vec{u}$ mit $\vec{u}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2:
Rechnen Sie nach, dass die Funktion

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} - e^t \\ e^{3t} + e^t \end{pmatrix}$$

das System

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= 2u_1(t) + u_2(t) \\ u_2'(t) &= u_1(t) + 2u_2(t) \end{aligned}$$

mit Anfangswert $\vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ löst.