Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein 15.05.2014

**Mathematik II für Naturwissenschaftler**

SS 2014 — Blatt 3

**Abgabe: Donnerstag, 22.05., in der Pause**

Die Übungsblätter finden Sie auch unter http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

**Aufgabe 1:** **4 Punkte**

Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme an und überprüfen Sie gegebenenfalls Ihre Ergebnisse durch eine Probe.

a)
$$\begin{aligned} \frac{x+5}{y-7} &= \frac{4}{3} \\ \frac{x+2}{y-5} &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2:** **4 Punkte**

Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ mit $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ lässt sich immer als Gerade im $\mathbb{R}^2$ darstellen. Sei nun ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

gegeben, bei dem $(a_{11}, a_{12}) \neq (0, 0)$ und $(a_{21}, a_{22}) \neq (0, 0)$ gilt. Dann werden die Lösungen der beiden einzelnen Gleichungen durch zwei Geraden $g$ und $h$ beschrieben.

a) Welche mögliche Lagebeziehungen gibt es zwischen den Geraden $g$ und $h$? Was kann man in den einzelnen Fällen über die Lösungen des Gleichungssystems aussagen?

b) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 12x_1 - 8x_2 &= 28 \\ 15x_1 - 10x_2 &= 35 \end{aligned}$$

Fertigen Sie eine Skizze der zugehörigen Geraden $g$ und $h$ (siehe Teil a)) an und geben Sie die Lösungsmenge an.

**Aufgabe 3:** **4 Punkte**

Wird Kaliumdichromat $K_2Cr_2O_7$ auf über $500°C$ erhitzt, zerfällt es in Kaliumchromat $K_2CrO_4$, Chromoxid $Cr_2O_3$ und Sauerstoff $O_2$. Die Reaktionsgleichung lautet

$$x_1K_2Cr_2O_7 \to x_2K_2CrO_4 + x_3Cr_2O_3 + x_4O_2$$

Um das Verhältnis zu bestimmen, in dem diese Reaktion stattfindet, suchen wir ganzzahlige positive Zahlen $x_1$, $x_2$, $x_3$ und $x_4$, die diese Gleichung erfüllen. Setzen Sie dazu $x_1 = s$ und bestimmen Sie $x_2$, $x_3$ und $x_4$ in Abhängigkeit von $s$. Hinweis: In der Reaktionsgleichung stecken drei Gleichungen, denn für jedes der drei Elemente müssen die Mengen auf beiden Seiten übereinstimmen.

**Aufgabe 4:** **4 Punkte**

Wie in Anwesenheitsaufgabe 2 kann man durch die Matrix $\mathbf{S_a} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Scherung und durch die Matrix $\mathbf{S_t} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Streckung definieren. Das Quadrat $Q$ sei wie in Anwesenheitsaufgabe 2 gegeben.

a) Skizzieren Sie $Q$ und die Bildmengen $\mathbf{S_a}(Q) = \{\mathbf{S_a}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Q\}$ für $a = 1$ und $a = 2$.

b) Skizzieren Sie die Bildmengen $\mathbf{S_t}(Q) = \{\mathbf{S_t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Q\}$ für $t = -2$ und $t = \frac{1}{2}$.

## Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 3

**Aufgabe 1:**

Geben Sie Beispiele für $a$, $b \in \mathbb{R}$ an, so dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y &= 3x - 2 \\ y &= ax + b \end{aligned}$$

a) keine, b) genau eine oder c) unendlich viele Lösungen besitzt.

**Aufgabe 2:**

Durch die Drehmatrix $\mathbf{D}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist eine Abbildung $\mathbf{D}_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{D}_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gegeben, die den Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ um den Winkel $\varphi$ dreht.

a) Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Rechnen Sie nach, dass $\mathbf{D}_\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{D}_\varphi\mathbf{u} + \mathbf{D}_\varphi\mathbf{v}$ gilt. Was bedeutet das geometrisch?

b) Skizzieren Sie das Quadrat $Q = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x,\, y \leq 1\}$ sowie die Bildmenge

$$\mathbf{D}_\pi(Q) = \{\mathbf{D}_\pi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Q\}.$$