Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein 22.05.2014

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2014 — Blatt 4

Abgabe: Mittwoch, 28.5., 12.00, Eckerstr. 1, vor Raum 150
oder nach Absprache mit den Tutoren

Die Übungsblätter finden Sie auch unter http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Ein Schmetterling legt 12 Eier und stirbt dann. Von den 12 Eiern entwickeln sich ein Viertel zu einer Raupe. Von den Raupen gelingt es einem Drittel, zu einem Schmetterling heranzuwachsen, der wiederum 12 Eier legt.

a) Stellen Sie die Lesliematrix auf.

b) Jedes der oben genannten Entwicklungsstadien dauere drei Monate. Sie beobachten eine Population aus 3 Schmetterlingen, 8 Eiern und 6 Raupen. Wie viele Schmetterlinge, Eier und Raupen sind es nach 3 Monaten? Wie viele nach einem Jahr?

c) Berechnen Sie die Inverse der Lesliematrix. Von welcher Ausgangspopulation können Sie ausgehen, wenn Sie drei Monate nach Beobachtungsbeginn 3 Schmetterlinge, 12 Eier und 2 Raupen zählen?

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &+ x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad &+ x_3 &= b_2 \\ x_1 - x_2 \quad &- 2x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass Sie das Gleichungssystem in der Form $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ schreiben können, wobei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie $\mathbf{A}^{-1}$.

c) Bestimmen Sie für die gegebenen rechten Seiten

$$(i)\,\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (ii)\,\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (iii)\,\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

die Lösungen $\mathbf{x}$ des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, indem Sie Teil b) verwenden.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A_a} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $\mathcal{P}(\lambda)$ an und bestimmen Sie jeweils die (reellen) Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen $\mathbf{A_4}$, $\mathbf{A_0}$ und $\mathbf{A_{-2}}$.

b) Bestimmen Sie nun die (reellen) Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{A_a}$ in Abhängigkeit von a. Tipp: Fallunterscheidung $a > 0$, $a = 0$ bzw. $a > 0$.

Knobelaufgabe: **4 Zusatzpunkte**

Zeigen Sie, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 4

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ berechnen. Berechnen Sie nun die Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrr} & 2x_2 & -x_3 & = 0 \\ & -\,x_2 & +x_3 & = -1 \\ 2x_1 & +\,3x_2 & & = 3 \end{array}$$

Aufgabe 2:

Geben Sie das charakteristische Polynom $\mathcal{P}(\lambda)$ der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

an und bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren.