

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2014 — Blatt 6

**Abgabe: Mittwoch, 18.06., 12.00, Eckerstr. 1, vor Raum 150
oder nach Absprache mit den Tutoren**Die Übungsblätter finden Sie auch unter <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/>**Aufgabe 1:****4 Punkte**

Berechnen Sie zu den Zahlen $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = \frac{2-i}{2}$ und $z_3 = -2 + 3i$ die folgenden Ausdrücke und geben Sie die Ergebnisse in der Form $z = x + iy$ an:

a) $z = \frac{1}{z_3}$

b) $z = \overline{z_1 z_2}$

c) $z = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}$

d) $z = z_1^3 + z_2^2$

Aufgabe 2:**4 Punkte**

a) Zeigen Sie: Für $z = x + iy$ gilt $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ und $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

b) Für welche Zahlen $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^2 \neq |z|^2$?

Aufgabe 3:**4 Punkte**

a) Finden Sie die Lösung $z = x + iy$ der Gleichung $\frac{20z-20i}{1-i} = 10z - 30$.

b) Finden Sie alle Lösungen zu den quadratischen Gleichungen:

(i) $z^2 + 4z + 20 = 0$.

(ii) $\frac{5}{6}z^2 = \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}$.

Aufgabe 4:**4 Punkte**

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Auf der Rückseite finden Sie noch eine fünfte Aufgabe. Sie dürfen maximal vier der fünf Aufgaben auswählen, d.h. das Blatt geht mit 16 Punkten in die Wertung ein!

Aufgabe 5:**4 Punkte**

- a) Geben Sie zu den komplexen Zahlen $z = 2 + i$ und $z = \sqrt{5} - \sqrt{3}i$ jeweils die Polarkoordinatendarstellung an. Denken Sie daran, Ihren Taschenrechner richtig einzustellen.
- b) Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung von $z = \frac{r_1(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))}{r_2(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))}$ an, d.h. finden Sie einen Radius \tilde{r} und einen Winkel $\tilde{\varphi}$, so dass sich z in der Form $\tilde{r}(\cos(\tilde{\varphi}) + i\sin(\tilde{\varphi}))$ schreiben lässt.
Tipp: Benutzen Sie die Additionstheoreme

$$\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos(2\alpha) \quad \text{und} \quad 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha).$$

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 6**Aufgabe 1:**

Gegeben $z = 2 + 3i$, berechnen Sie z^2 , \bar{z} , $\frac{i}{z}$, $|z|$ und z^{-1} .

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

- a) Zeichnen Sie $z_1 = 3(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$ und geben Sie z_1 in der Form $x + iy$ an.
- b) Zeichnen Sie $z_2 = 1 + i$ und $z_3 = 1 - i$ und bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung der beiden Zahlen.