

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2014 — Blatt 7

Abgabe: Donnerstag, 26.06., in der PauseDie Übungsblätter finden Sie auch unter <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/>**Aufgabe 1:****4 Punkte**

- a) Geben Sie $z = 2e^{-4i}$ und $z = e^{\frac{3}{2}\pi i}$ in der Form $z = x + iy$ an.
- b) Berechnen Sie $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i))^{2012}$. Frage: Kann man sich das Ergebnis anschaulich erklären?

Aufgabe 2:**4 Punkte**Gesucht ist die Zahl $z \in \mathbb{C}$, die $z^2 = -i$ erfüllt.

- a) Veranschaulichen Sie sich die Situation zunächst anhand einer Zeichnung und lesen Sie anhand der geometrischen Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen z ab.
- b) Prüfen Sie Ihr Ergebnis anhand einer Rechnung.

Aufgabe 3:**4 Punkte**Die Lösungen x der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ berechnet man mit der pq -Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Sei $D := \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$.

- a) Geben Sie Bedingungen an D an, so dass die Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen, zwei verschiedene komplexe Lösungen oder genau eine reelle Lösung besitzt.
- b) Geben Sie jeweils Beispiele für p und q an, so dass die Fälle aus Teil a) eintreten.

Aufgabe 4:**4 Punkte**

Eine Ellipse mit den Halbachsen a und b wird beschrieben durch $E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$.

Gegeben ist der Einheitskreis $K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$, sowie die Matrix $A := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Matrix A den Einheitskreis auf die Ellipse mit Halbachsen a und b abbildet, d.h. für ein beliebiges $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K$ zeigen Sie, dass $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$ gilt.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel

$$F_E = \det A F_K$$

den Flächeninhalt der Ellipse mit Halbachsen 2 und 3. Dabei bezeichnet F_E den Flächeninhalt der Ellipse und F_K den Flächeninhalt des Einheitskreises.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 7**Aufgabe 1:**

a) Schreiben Sie $z = e^i$ in der Form $z = x + iy$. (Hinweis: $\sin(1) \approx 0.8$, $\cos(1) \approx 0.5$)

b) Berechnen Sie $(-1 + i)^{11}$.

c) Finden Sie anhand der geometrischen Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen die Zahl $z \in \mathbb{C}$, die $z^2 = 4i$ erfüllt.

Aufgabe 2:

Gegeben ist der Einheitskreis $K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$, sowie die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Zeichnen Sie die Menge

$$\left\{ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K \right\}.$$