Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 22.12.2014

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2014/15 — Blatt 10

Abgabe: Montag, den 12. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Ziel dieser Aufgabe ist es, eine approximative Lösung der Gleichung $e^x - 1 = \cos x$ zu finden. Gehen Sie dabei wie folgt vor: Definieren Sie zunächst eine geeignete Hilfsfunktion, mit der Sie das Problem in ein äquivalentes Nullstellenproblem umschreiben können.
Lösen Sie anschließend das Nullstellenproblem mit dem Newton-Verfahren. Beginnen Sie dazu bei $x_0 = 1$ und runden Sie Ihre Zwischenergebnisse x_i auf 5 Stellen genau. Berechnen Sie x_1 bis x_4 und testen Sie x_4 in der Ausgangsgleichung. Überzeugen Sie sich anschließend anhand einer Skizze davon, dass $x_0 = 1$ ein sinnvoller Startwert ist. **Bemerkung:** Sie dürfen nun endlich Ihren Taschenrechner benutzen, denken Sie jedoch daran, ihn auf Bogenmaß einzustellen!

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{3x-6}{x+2}$.

- Geben Sie den Definitionsbereich sowie die Nullstellen von f an.
- Geben Sie die Polstellen von f an, entscheiden Sie ob an den Polstellen ein Vorzeichenwechsel vorliegt und bestimmen Sie das asymptotische Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$.
- Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f. Ist f monoton auf $\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

- Untersuchen Sie die Folge $a_n = \frac{n+1}{n^2-1}$, $n \geq 2$, auf Konvergenz.
- Untersuchen Sie die Folge $b_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-2}{2n+2}\right)$, $n \geq 1$, auf Konvergenz.
- Schreiben Sie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{1024}$ mit Summenzeichen.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Bestimmen Sie den Radius und die Höhe einer Dose vom Volumen V=1 Liter so, dass der Flächeninhalt der Oberfläche minimal wird.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Skizzieren Sie folgenden Funktionen (ohne GTR!) und erläutern Sie Ihre Ergebnisse!

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad g(x) = \frac{3x^2-9}{4x^2-4}$$

Aufgabe 6: **4 Punkte**

Der Trainer der Handballmannschaft des "HC Turbine Dupfingen" kann aus dem Vollen schöpfen, denn beide Torhüter und alle 12 Feldspieler sind, trotz der Weihnachtsfeier am Vorabend, tatsächlich zur Abfahrt zum Auswärtsspiel beim "TuS Amboss Dettingen '05" erschienen. In der ersten Halbzeit lässt der Trainer seine Stammmannschaft, bestehend aus 6 Feldspielern und einem Torwart auflaufen. Nach einer katastrophalen Leistung in der ersten Halbzeit, sieht er sich allerdings dazu gezwungen, 3 Feldspieler und den besonders schlecht aufgelegten Torwart vorzeitig zum Duschen zu schicken. Wieviele Möglichkeiten hat er, diese Spieler zu ersetzen, wenn gleichzeitig die verbleibenden 3 Feldspieler aus der Stammmannschaft auf jeden Fall zu Ende spielen müssen?

Aufgabe 7: **4 Punkte**

Eine Parabel habe bei $x_0 = -3$ eine Nullstelle und ein absolutes Minimum in $(0, -2)$. Geben Sie die Gleichung dieser Parabel an.

Aufgabe 8: **4 Punkte**

- Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ mit Hilfe der Regel von l'Hospital. Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass die Voraussetzungen erfüllt sind.

- Können Sie mit Hilfe des ersten Aufgabenteils auf die Existenz des Grenzwerts $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}$ schließen? Begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie anschließend $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Aufgabe 9: **4 Punkte**

Für die Anzahl $x(t)$ der Lebewesen in einer Population zur Zeit t (in Tagen) werde die folgende Messreihe ermittelt:

t	0	5	10	15	20	25	30
x	1000	1140	1300	1480	1690	1920	2190

Prüfen Sie auf graphischem Wege nach, ob zwischen x und t ein Zusammenhang der Gestalt $x(t) = Ae^{at}$ bestehen könnte, indem Sie $\ln(x)$ gegen t auftragen. Falls ja, bestimmen Sie näherungsweise die Konstante a.

Aufgabe 10: **4 Punkte**

Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

- $f(x) = x^k x^l,\ k, l \in \mathbb{N}, \qquad g(x) = (\sin x + 3x)^5.$

- $h(x) = \cot x := \dfrac{\cos x}{\sin x},\ x \in (0, \pi), \qquad u(x) = \ln(\cos(x^2) + 2).$

Sie dürfen maximal 6 Aufgaben abgeben, können also 24 Punkte erzielen. Gewertet wird das Blatt jedoch nur mit 16 Punkten, das heißt 8 Bonuspunkte sind möglich. Nach Weihnachten bekommen Sie eine Musterlösung! Wir wünschen Ihnen trotzdem erholsame Feiertage, einen guten Rutsch und weiterhin viel Spaß und Erfolg für Ihr Studium!