Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 12.1.2015

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2014/15 — Blatt 11
Abgabe: Montag, den 19. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und gerade, d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und ungerade, d.h. $g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Machen Sie sich anhand geeigneter Skizzen klar:

- Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$
- Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\int\limits_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0$.
- Welchen Wert hat für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ das Integral $\int\limits_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

- Berechnen Sie den Mittelwert $\bar{f}$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5x$ auf dem Interval $I = [0, 2]$. Finden Sie anschließend den Punkt $c \in I$ mit $f(c) = \bar{f}$. Verwenden Sie dazu ein Kurvendiskussionsprogramm Ihrer Wahl aus dem Internet oder Ihren GTR.
- Betrachten Sie nun die unstetige Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1), \\ x^2 + 2, & x \in [1, 2] \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass kein $c \in I = [0, 2]$ existiert mit $f(c) = \bar{f}$.
Bemerkung: Dieser Aufgabenteil zeigt, dass Stetigkeit eine notwendige Voraussetzung für die Gültigkeit des Mittelwertsatzes der Integralrechnung ist!

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Ein Sektglas entstehe näherungsweise durch Rotation der Parabel $f(x) = \frac{x^2}{a}$, $x \in [0, b]$, $a > 0$, um die y-Achse.

- Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $g := f^{-1}$.
- Berechnen Sie anhand der Formel

$$V(h) = \pi \int\limits_{0}^{h} g(y)^2\,dy,$$

wieviel Flüssigkeit ein bis zur Höhe $h \geq 0$ befülltes Sektglas enthält.

- Erläutern Sie anhand einer Skizze, warum in der Formel für $V(h)$ die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ verwendet wird.

Aufgabe 3 (Newtonsches Abkühlungsgesetz): 4 Punkte

Befindet sich ein Gegenstand der Anfangstemperatur $u(0) = u_0$ in einem Raum mit konstanter Temperatur a, so wird die Temperaturänderung des Gegenstands durch die Gleichung

$$u'(t) = -k(u(t) - a),\ t > 0, \qquad u(0) = u_0 \tag{$*$}$$

beschrieben. Dabei ist u_0 die Anfangstemperatur des Gegenstands, a ist die konstante Raumtemperatur, k die konstante Abkühlungsrate und $u(t)$ die Temperatur des Gegenstands zum Zeitpunkt t.

- Zeigen Sie, dass die Funktion $u(t) = a + (u(0) - a)e^{-kt}$ die Gleichung $(*)$ löst.
- Sie haben 150 ml $85^\circ\,C$ heißen Kaffees und 50 ml $10^\circ\,C$ kalter Milch und möchten einen Milchkaffee trinken. Da Sie nur wenig Zeit haben, sollte der Kaffee so schnell wie möglich auf Trinktemperatur ($58^\circ C$) abkühlen. Ist es sinnvoller, zuerst die Milch mit dem Kaffee zu vermischen und dann zu warten, oder sollten Sie die Milch lieber erst am Ende in den Kaffee geben? Nehmen Sie $k = 0,025\frac{1}{min}$ und $a = 20^\circ\,C$ an und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Hinweis: Die Vermischung einer Kaffeemenge p mit der Temperatur u_K und einer Milchmenge q mit einer Temperatur u_M führt sofort dazu, dass die Mischungsmenge $p + q$ die Temperatur $\frac{pu_K + qu_M}{p+q}$ hat.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 11

Aufgabe 1:

In welchem Punkt $c \in [-1, 1]$ nimmt die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$, ihren Mittelwert $\overline{f}$ an?

Aufgabe 2: 4 Punkte

- Finden Sie eine Stammfunktion zu folgenden Funktionen:

$$f(x) = 2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 2, \qquad g(x) = 6(3x - 1)^3$$
$$h(x) = 3\frac{1}{x^2} + 4x^2, \qquad u(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}.$$

- Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_1^4 (x + \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin(x)\,dx$$
$$\int_{-1}^0 (1 + e^{-x})\,dx, \qquad \int_0^1 (1 + e^x)\,dx.$$