

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2014/15 — Blatt 12

Abgabe: Montag, den 26. Januar, vor der Vorlesung

Das Blatt enthält 5 Aufgaben, davon gehen jedoch nur 4 in die Wertung ein. Das heisst Sie können 4 Bonuspunkte erhalten

Aufgabe 1:**4 Punkte**

- Berechnen Sie mit Hilfe partieller Integration:

$$\int_1^{10} \sqrt{x-1} \ln(x-1) dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(x) dx$$

- Berechnen Sie mit Hilfe des ln-Tricks:

$$\int_1^3 \frac{x+1}{x^2+2x} dx, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot(x) dx.$$

Aufgabe 2:**4 Punkte**

Berechnen Sie mit Hilfe der angegebenen Substitution:

$$\int_a^b x \sin(x^2) dx, \quad \text{mit } f(y) = \sin(y) \text{ und } g(x) = x^2,$$

$$\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x e^{x^2} dx, \quad \text{mit } f(y) = \frac{1}{2} e^y \text{ und } g(x) = x^2.$$

Aufgabe 3:**4 Punkte**

Entscheiden Sie welche der Integrale existieren und berechnen Sie die jeweiligen Werte:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^3} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1/3}} dx.$$

Aufgabe 4:**4 Punkte**

Sie werfen dreimal mit einer gezinkten Münze für die gilt $P(\text{Kopf}) = 1/3$ und $P(\text{Zahl}) = 2/3$. Wie wahrscheinlich ist es, dass mindestens einmal das Symbol "Kopf" erscheint? Wie wahrscheinlich ist es, dass in genau zwei von drei Würfeln das gleiche Symbol erscheint? Geben Sie zunächst Ω , E_1 und E_2 an und benutzen Sie ein Baumdiagramm, um sich das Experiment zu veranschaulichen.

Aufgabe 5:**4 Punkte**

Stellen Sie sich vor, Sie würfeln einmal mit einem normalen Würfel. Die Ereignismenge Ω ist dann $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Gegeben seien außerdem die Ereignisse

$$A = \{\text{''Die Zahl ist gerade''}\},$$

$$B = \{\text{''Die Zahl ist kleiner oder gleich 4''}\},$$

$$C = \{\text{''Die Zahl ist gerade und kleiner oder gleich 4''}\}.$$

- Geben Sie die Ereignisse A , B und C in aufzählender Mengenschreibweise an und berechnen Sie $P(A)$, $P(B)$ und $P(C)$.
- Verifizieren Sie die Formel

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

indem Sie beide Seiten der Gleichung ausrechnen.

- Geben Sie \overline{B} in aufzählender Mengenschreibweise an und verifizieren Sie die Formel

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B),$$

indem Sie beide Seiten der Gleichung ausrechnen.

- Sie würfeln eine Zahl, die kleiner oder gleich 4 ist, d.h. Ereignis B tritt ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Zahl außerdem gerade ist, d.h. dass auch Ereignis C eintritt? Tipp: Benutzen Sie die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 12**Aufgabe 1:**

Berechnen Sie $\int_3^4 \frac{1}{x^2-x-2} dx$, indem Sie zunächst die Nullstellen bestimmen und dann eine Partialbruchzerlegung vornehmen. Geben Sie anschließend eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ an.

Berechnen Sie $\int_1^3 x \ln(x) dx$ mittels partieller Integration. Berechnen Sie ausserdem $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx$ mit Hilfe der Substitution $g(x) = \sin(x)$ und $f(y) = \frac{1}{y^2}$.

Aufgabe 2:

Geben Sie für die folgenden drei Spiele jeweils die Ergebnismengen Ω_a , Ω_b , Ω_c sowie $|\Omega_a|$, $|\Omega_b|$ und $|\Omega_c|$ an.

- Spiel a : "Würfeln Sie mit zwei nicht unterscheidbaren Würfeln und schauen Sie auf die möglichen Zahlenpaare der oben liegenden Flächen."
- Spiel b : "Würfeln Sie mit einem roten und einem blauen Würfel und schauen Sie auf die möglichen Zahlenpaare der oben liegenden Flächen."
- Spiel c : "Würfeln Sie mit zwei nicht unterscheidbaren Würfeln und schauen Sie auf die Summe der Zahlen auf den oben liegenden Flächen."
- Welche der Spiele sind ein Laplace-Experiment?