Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 2.2.2015

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2014/15 — Blatt 14

Abgabe: Montag, den 9. Februar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass eine standardnormalverteilte Zufallsvariable X, das heisst eine Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, Erwartungswert 0 und Varianz 1 hat. Sie dürfen verwenden, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 1$ gilt. Gehen Sie nun wie folgt vor.

- Zeigen Sie $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{e^{x^2/2}} = 0$ mit Hilfe der Regel von l'Hospital.
- Nutzen Sie die Symmetrieeigenschaften der Funktion $x \mapsto x \cdot \varphi(x)$ um zu zeigen, dass gilt

  $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x)\, dx = 0.$$

  Berücksichtigen Sie außerdem, dass es sich um ein uneigentliches Integral handelt. Im Skriptum wurde dieser Punkt weniger genau behandelt.
- Zeigen Sie mit Hilfe partieller Integration (Tipp: $u(x) = x$, $v'(x) = x\varphi(x)$), dass gilt

  $$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x)\, dx = 1.$$

  Berücksichtigen Sie auch dafür, dass es sich um ein uneigentliches Integral handelt und verwenden Sie den ersten Aufgabenteil.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

In eine Zählkammer wird eine Suspension roter Blutkörperchen eingebracht. Eine Auszählung hinreichend vieler Quadrate der Zählkammer ergibt für die mittlere Anzahl roter Blutkörperchen pro Quadrat den Wert $\lambda = 10$. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in einem beliebig ausgewählten Quadrat Q der Zählkammer höchstens 5, genau 8 oder mindesten 3 Blutkörperchen befinden?

Aufgabe 3: **4 Punkte**

In einem Liter Industrieabwasser seien im Mittel $\lambda = 1000$ Kolibakterien. Der Umweltbeauftragte der Firma möchte Journalisten "beweisen", dass sein Wasser frei von Bakterien ist. Er schöpft dazu ein Reagenzglas voll mit Wasser und lässt den Inhalt mikroskopisch nach Bakterien absuchen. Wie klein muss das Glas sein, damit gilt $P(X = 0) \geq 0,90$?

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Das Körpergewicht von Jugendlichen ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 60$kg und Standardabweichung $\sigma = 5$kg. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Jugendlicher leichter als $57,5$kg oder schwerer als 60kg ist. Finden Sie außerdem eine Zahl x_0, so dass Gewicht von $98,8\%$ aller Jugendlichen um weniger als x_0 vom Erwartungswert abweicht.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 14

Aufgabe 1:

Sei $X \sim N(0,1)$ und $\Phi(x) := P(X < x)$ die Verteilungsfunktion von X. Begründen Sie graphisch, dass gilt:

- $P(X \geq x) = 1 - \Phi(x)$.
- $P(X \geq -x) = 1 - \Phi(-x) = \Phi(x)$.
- $P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$.
- Berechnen Sie mit Hilfe der Tabelle $P(X \geq 0,2)$, $P(X \geq -1,96)$ und $P(0,2 \leq X \leq 3)$.
- In welchem Intervall $(-b, b)$ liegen 77% der Ereignisse?

x	0	0,2	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,96	2	2,5	3,0
$\Phi(x)$	0,5	0,579	0,691	0,77	0,841	0,89	0,933	0,975	0,977	0,994	0,999

Table 1: Wertetabelle der Φ - Funktion