Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 3.11.2014

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2014/15 — Blatt 2

Abgabe: Montag, den 10. November, vor der Vorlesung

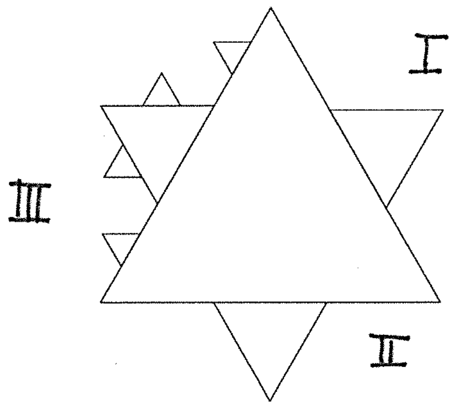
Aufgabe 1: **4 Punkte**

Im Skript ist in Beispiel 2.2 b) ein Tippfehler. Zeigen Sie daher allgemein folgendes: Definiert man für $q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $a \in \mathbb{R}$ das Folgenglied $x_n := aq^n$ so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \sqrt{x_{n+1}x_{n-1}} \quad .$$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Die Ausgangsfigur D_0 sei ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $1cm$. Die Berandung von D_1 entsteht iterativ aus D_0 indem auf dem mittleren Drittel jeder Seite von D_0 ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird. D_2 entsteht dann aus D_1 indem auf dem mittleren Drittel jeder geradlinigen Berandung von D_1 ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird:



Auf den Seiten I, II des Ausgansdreiecks D_0 ist je ein Iterationsschritt ausgeführt, auf der Seite III sind zwei Schritte ausgeführt.

a) Der Umfang von D_0 ist $U_0 = 3$. Finden Sie eine rekursive Vorschrift, mit der sich U_{n+1} aus U_n berechnen lässt.

b) Finden Sie nun eine explizite Vorschrift für U_{n+1}. Was könne Sie über das Konvergenzverhalten von $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussagen?

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Finden sie zur Folge $a_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ drei verschiedene Folgen b_n, so dass gilt:

a) die Folge $\frac{a_n}{b_n}$ ist eine Nullfolge,

b) die Folge $\frac{a_n}{b_n}$ konvergiert gegen 2,

c) die Folge $\frac{a_n}{b_n}$ divergiert.

d) Erklären Sie, warum die gefundenen Beispiele keinen Widerspruch zum zweiten Konvergenzsatz aus der Vorlesung darstellen.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Benutzen Sie die Konvergenzsätze aus der Vorlesung um zu entscheiden, ob die jeweilige Folge konvergiert und geben Sie den Grenzwert an, falls er existiert:

a)

$$a_n := \frac{3n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 4n + 2}, \qquad b_n := \frac{n^2 + 4n + 4}{(n+1)(n+2)} .$$

b)

$$c_n := \frac{2n - 1}{n}, \qquad d_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ 1 + \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 3

Aufgabe 1:

Begründen Sie, warum die angegebenen Folgen konvergieren bzw. divergieren:

$$a_n := \begin{cases} n, & \text{falls } 0 \leq n \leq 10000 \\ \frac{n+10000}{n^2}, & \text{falls } 10001 \leq n \end{cases} \qquad b_n := \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Folge $a_n := \frac{3n+1}{2n+2}$.

a) Setzen Sie $n = 1000$ ein und stellen Sie eine Vermutung über den Grenzwert a der Folge auf.

b) Rechnen Sie nach, dass a_n tatsächlich gegen den Grenzwert $a = \frac{3}{2}$ konvergiert, indem Sie den Konvergenzsatz 2 aus der Vorlesung benutzen. Sie dürfen verwenden, dass $\frac{1}{2n+2}$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.