

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2014/15 — Blatt 5

Abgabe: Montag, den 24. November, vor der Vorlesung**Aufgabe 1:****4 Punkte**

Geben Sie für die folgenden beiden Funktionen jeweils die Umkehrfunktion an und prüfen Sie nach, dass $f^{-1}(f(x)) = x$ und $f(f^{-1}(y)) = y$ gilt:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{3}{2}x - 2$.
- $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow [2, \infty)$, $f(x) := x^2 + 2$.
- Zeichnen Sie die Funktionen und ihre jeweilige Umkehrfunktion. Fällt Ihnen ein geometrischer Zusammenhang zwischen den Graphen auf?

Aufgabe 2:**4 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := 3x + 4x + 5$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) := 2x^2 - 1$ definiert.

- Berechnen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$.
- Finden Sie ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $(f \circ g)(x_0) \neq (g \circ f)(x_0)$. Das bedeutet, dass die Verknüpfung "o" nicht kommutativ ist.

Aufgabe 3:**4 Punkte**

Finden Sie ein Polynom zweiten Grades, das symmetrisch zur y -Achse ist, an der Stelle $x_0 = 3$ eine Nullstelle besitzt und durch den Punkt $P(0/-12)$ geht.

Aufgabe 4:**4 Punkte**

Wirft man einen Stein unter Vernachlässigung des Luftwiderstands aus einer Höhe von 1,5 Metern senkrecht nach oben, so kann man die Höhe des Steins in Abhängigkeit von der Zeit t mit der Formel $H(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2 + \frac{3}{2} m$ berechnen. Hierbei bezeichnet v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Steins und $g := 9,81 \frac{m}{s^2}$ die Gravitationskonstante.

1. Skizzieren Sie $H(t)$ und berechnen Sie in Abhängigkeit von v_0 und g die Zeit T an, zu der der Stein wieder auf dem Boden aufkommt.
2. Wann erreicht der Stein bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 20 \frac{m}{s}$ eine Höhe von 5 Metern?
3. Bringen Sie H in Scheitelpunktsform.
4. Bestimmen Sie die maximale Höhe, die der Stein erreicht, in Abhängigkeit von v_0 .

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 5

Aufgabe 1:

Es seien die Funktionen $h(x) := x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ und $k(x) := x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

- Skizzieren Sie h und k . Sind die Funktionen gerade oder ungerade?
- Berechnen Sie $h \circ k$ und $k \circ h$.
- Wie müssen die Definitionsbereiche für k und h eingeschränkt werden, so dass die Funktionen umkehrbar sind? Was sind dann die Wertebereiche von k und h ?
- Berechnen und skizzieren Sie die Umkehrfunktionen h^{-1} und k^{-1} .

Aufgabe 2:

- Geben Sie eine Parabel an, deren Nullstellen bei $x = -1$ und $x = 3$ liegen. Ist diese Parabel eindeutig bestimmt?
- Rechnen Sie nach, dass sich die Funktion $f(x) := ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ schreiben lässt als

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Bemerkung: Diese Darstellung heißt **Scheitelpunktsform** und kann mittels quadratischer Ergänzung hergeleitet werden.

- Schreiben Sie Ihre Parabel aus dem ersten Aufgabenteil in Scheitelpunktsform und machen Sie sich klar, dass der Graph der Funktion symmetrisch bezüglich der Geraden parallel zur y -Achse durch den Scheitelpunkt ist. Was können Sie daraus über die Lage der Nullstellen (sofern vorhanden) und des Extremwerts der Parabel aussagen?
- Durch Variation welcher Parameter wird der Graph einer Funktion
 - an der x -Achse gespiegelt?
 - an der y -Achse gespiegelt?
 - in x - bzw. y -Richtung verschoben?