Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 24.11.2014

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2014/15 — Blatt 6

Abgabe: Montag, den 1. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Für $0 < \alpha < \infty$ und $0 < f_0 < K$ sei die Gompertz-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) := Ke^{\left(\ln\left(\frac{f_0}{K}\right)e^{-\alpha t}\right)}.$$

- Berechnen Sie $f(0)$.
- Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}$ und berechnen Sie das Vorzeichen von $\ln\left(\frac{f_0}{K}\right)$.
- Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} f(t)$.
- Berechnen Sie $\lim_{t\to-\infty} f(t)$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Gegeben seien die gebrochen rationalen Funktionen

$$f(x) := \frac{x}{x^2+x-6}, \quad g(x) := \frac{2x^2-3x+1}{x^2+x-6}, \quad h(x) := \frac{(x-2)(x+3)(x-4)}{x^2-5x}.$$

- Bestimmen Sie für f, g und h jeweils den Definitionsbereich und berechnen Sie die Nullstellen und die Polstellen der Funktionen. Liegen bei den Polstellen Vorzeichenwechsel vor?
- Zeigen Sie, dass für die Funktion h gilt:

$$h(x) = x + 2 + \frac{24}{x^2-5x}.$$

- Geben Sie das asymptotische Verhalten von f, g und h für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an. Tipp: Benutzen Sie für die Funktion h Teil 2.
- Skizzieren Sie die Schaubilder (ohne GTR!).

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Lösen Sie die folgenden Gleichungen ohne Taschenrechner nach x auf und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich:

- $e^{6x+3\ln 2} = 2$
- $\ln x^3 - 2\ln x - \ln 5 = 3$

Aufgabe 4 (Michaelis-Menten Gleichung) 4+4 Bonuspunkte

Bei einer Enzymkatalyse wird die Reaktionsgeschwindigkeit $v(s)$ in Abhängigkeit der Konzentration vereinfacht durch die Michaelis-Menten Gleichung beschrieben:

$$v(s) = \frac{v_{\max} s}{K_m + s}. \qquad (*)$$

Hierbei bezeichnet $s > 0$ die Konzentration, $v_{\max}$ die maximale Reaktionsgeschwindigkeit und K_m die Michaeliskonstante des Enzyms.

- Nehmen Sie an, dass $v_{\max} > 0$ und $K_m > 0$ gegeben sind und bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von $v(s)$ für $s \to \infty$.
  Skizzieren Sie $v(s)$.
- Für welche Substratkonzentration s_0 gilt $v(s_0) = \frac{v_{\max}}{2}$?

Bonusaufgabe (+4 Punkte):

- Invertieren Sie $(*)$ und leiten Sie daraus eine Gleichung $y = mx + c$ mit $y = \frac{1}{v(s)}$ und $x = \frac{1}{s}$ her.
- Sie möchten nun experimentell $v_{\max}$ und K_m für ein bestimmtes Enzym bestimmen. Dazu führen Sie drei Experimente durch, bei denen Sie bei drei verschiedenen Konzentrationen s_1, s_2 und s_3 jeweils die Reaktionsgeschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3 bestimmen. Nun tragen Sie die invertierten Wertepaare $(\frac{1}{s_1}, \frac{1}{v_1})$, $(\frac{1}{s_2}, \frac{1}{v_2})$ und $(\frac{1}{s_3}, \frac{1}{v_3})$ in ein Diagramm ein und verbinden die drei Punkte. Aus Teil b) wissen Sie, dass dabei eine Gerade entsteht.
  Erklären Sie, wie man aus dieser Geraden K_m und $v_{\max}$ ablesen kann.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 6

Aufgabe 1:

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

- $\ln(2x) + \ln(2y) - \ln z - \ln 4$
- $\ln(x^2 - y^2) + \ln(\frac{1}{x-y})$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f(x) := \frac{x}{x^2-2}$.

- Geben Sie den Definitionsbereich von f an und untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie.
- Bestimmen Sie die Polstellen von f. Liegt an den Polstellen ein Vorzeichenwechsel vor? Begründen Sie Ihre Antwort. Untersuchen Sie dann das asymptotische Verhalten von f für $x \to \pm\infty$.