Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 1.12.2014

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2014/15 — Blatt 7

Abgabe: Montag, den 8. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Der Umfang der Erde am Äquator sei als $U = 40.000$km angenommen.

- Zeichnen Sie den 48°. Breitengrad der Nordhalbkugel auf einer Skizze, auf der Sie die Erde entlang eines Längenkreises aufschneiden und berechnen Sie seine Länge $U_{48°}$. Übrigens: der 48°. Breitengrad verläuft durch Freiburg und ist unweit des Institutsviertels an der Kreuzung Habsburgerstraße-Ludwigstraße markiert.

- Können Sie eine Formel herleiten, mit welcher Sie allgemein die Länge U_α der Breitengrade aus dem Umfang der Erde berechnen können?

Aufgabe 2: **4 Punkte**

- Es gilt $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Berechnen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme $\cos 15°$ und $\sin 75°$.

- Die Funktionen Sinushyperbolicus und Kosinushyperbolicus sind folgendermaßen definiert:

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$
$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Zeigen Sie, dass für diese Funktionen gilt:

a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

b) $\cosh(x) = \cosh(-x)$ und $\sinh(-x) = -\sinh(x)$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

- Begründen Sie, dass die Gompertzfunktion (s. Blatt 6, Aufgabe 1) stetig ist. Inwiefern war dies für die Aufgabenstellung auf Blatt 6 wichtig?

- Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (-\infty, 1], \\ 3x + a & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass f stetig ist.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

- Zeigen Sie
$$\cos(t+\pi) = -\cos(t),$$
$$\sin(t+\pi) = -\sin(t)$$
mit Hilfe der Additionstheoreme für sin und cos.

- Veranschaulichen Sie die Symmetrieeigenschaften
$$\cos(t) = \cos(-t), \qquad \sin(t) = -\sin(-t),$$
indem Sie diese Größen in einer Skizze markieren (z.B wie in Abbildung 3.3 im Skript für $t = \pi/4$). Beachten Sie dabei: $-t$ bedeutet, dass die Bogenlänge mit dem Uhrzeigersinn aufgetragen wird.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 7

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion $f(x) := x^3 + x + 1$.

- Berechnen Sie $f(-1)$ und $f(0)$. Begründen Sie dann mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f im Intervall $[-1, 0]$ eine Nullstelle besitzt.
- Berechnen Sie $f(-\frac{1}{2})$. Entscheiden Sie nun, ob die Nullstelle im Intervall $[-1, -\frac{1}{2}]$ oder in $[-\frac{1}{2}, 0]$ liegt.

Aufgabe 2:

Gegeben seien die periodischen Funktionen

$$f(t) = 3\sin(2\pi t),$$
$$g(t) = 2\sin(t + \frac{\pi}{2}),$$
$$h(t) = -\sin(\frac{2\pi t}{3} - \frac{\pi}{2}).$$

Skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen und diskutieren Sie die Unterschiede zum Graphen von $\sin(t)$, indem Sie sich die Lage der Nullstellen überlegen und sich klar machen, welche Amplitude A und Periodendauer T die periodischen Funktionen haben. Markieren Sie in einer "allgemeinen" Skizze die Parameter A_0, T, φ_0 der Funktion

$$f(t) = A_0 \sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0).$$