Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 8.12.2014

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2014/15 — Blatt 8

Abgabe: Montag, den 15. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen und vereinfachen Sie falls möglich das Ergebnis.

a) $f(x) = x^3 \sin x$

b) $g(x) = \dfrac{x^3+5}{x^2+1}$

c) $h(x) = \arccos(x)$

d) $u(x) = \dfrac{\ln x + \sin x}{x}$

e) $v(x) = \big(x+a\big)^2$ mit $a \in \mathbb{R}$

f) $w(x) = \ln\big(\dfrac{e^x - 1}{e^x}\big)$

g) $k(x) = \sqrt{x^2+1}$

h) $l(x) = a^x$ mit $a > 0$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

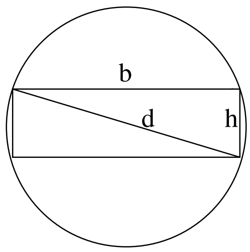
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{falls } x \leq 2, \\ bx^3 + 4 & \text{falls } x > 2. \end{cases}$$

Berechnen Sie für $x < 2$ und für $x > 2$ die Ableitung $f'(x)$. Bestimmen Sie a, $b \in \mathbb{R}$ so, dass f und f' auf $\mathbb{R}$ stetig sind.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt so herausgeschnitten werden, dass sein Widerstandsmoment $W = \frac{1}{6}bh^2$ den größtmöglichen Wert annimmt (d.h. der Balken soll so stabil wie möglich sein). Berechnen Sie b und h in Abhängigkeit von d so, dass W maximal wird.



b: Breite des Balkens, h: Höhe des Balkens, d: Durchmesser des Baumstamms

Tipp: Finden Sie anhand der Skizze einen Zusammenhang zwischen b, h und d.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

Die Funktion f sei durch folgende beiden äquivalenten Darstellungen gegeben $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x} = \frac{1/2x^2+2}{x}$.

- Bestimmen Sie die Polstellen sowie das asymptotische Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$.
- Bestimmen Sie alle Nullstellen und Minima und/oder Maxima.
- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion für $x \in [-5, 5]$.

Tipp: Entscheiden Sie in jedem Aufgabenteil, welche Darstellung der Funktion sich besser für die jeweilige Problemstellung eignet.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 8

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2$ sowie die Punkte $x_0 = 3$ und $x_n = 3 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Steigung der Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_n, f(x_n))$, d.h $\frac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n}$ sowie $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n}$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit $f'(3)$.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen: Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) := e^{\cos(2x+x^2)}$,

b) $g(x) := \sqrt{x}$,

c) $h(x) := 2^x$, Tipp: $2^x = e^{x\ln(2)}$

d) $u(x) = \frac{x}{x^5-1}$