Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 15.12.2014

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2014/15 — Blatt 8

Abgabe: spätestens Montag, den 22. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Ziel dieser Aufgabe ist es, eine approximative Lösung der Gleichung $e^x - 1 = \cos x$ zu finden.

- Definieren Sie eine geeignete Hilfsfunktion, mit der Sie das Problem in ein äquivalentes Nullstellenproblem umschreiben können.
- Lösen Sie das Nullstellenproblem mit dem Newton-Verfahren. Beginnen Sie dazu bei $x_0 = 1$ und runden Sie Ihre Zwischenergebnisse x_i auf 5 Stellen genau. Berechnen Sie x_1 bis x_4 und testen Sie x_4 in der Ausgangsgleichung. Überzeugen Sie sich anschließend anhand einer Skizze davon, dass $x_0 = 1$ ein sinnvoller Startwert ist. **Bemerkung:** Sie dürfen nun endlich Ihren Taschenrechner benutzen, denken Sie jedoch daran, ihn auf Bogenmaß einzustellen!

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Berechnen Sie jeweils das Taylorpolynom der Ordnung fünf im Punkt $x_0 = 0$.

- $f(x) = e^{2x}$.
- $g(x) = \sin x$.

Erkennen Sie ein "Muster", anhand dessen Sie das jeweilige Taylorpolynom vom Grad n, $n \in \mathbb{N}$, angeben können?

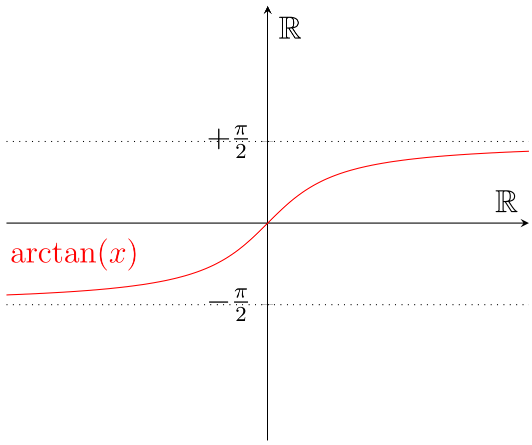
Aufgabe 3: **4 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital aber überprüfen Sie zunächst ob die Voraussetzungen erfüllt sind.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{e^x - 1}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x + 2x}{\cos x + 2x}$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^a - a^x}{a^x - x^a}$, $a \neq 1$, $a \neq 0$. Tipp: Schreiben Sie zunächst x^a und a^x als $e^{a \ln x}$ bzw. $e^{x \ln a}$.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Funktionen, deren Graph einen S - förmigen Verlauf haben, werden als Sigmoid - Funktionen bezeichnet. Sie sind streng monoton und haben genau einen Wendepunkt. Ein Wendepunkt ist ein Punkt, in dem der Graph die Krümmung wechselt. Ein Beispiel hierfür ist der arctan mit Wendepunkt in $x = 0$:



- Skizzieren Sie qualitativ (ohne Rechnung!) den Verlauf von $\arctan'(x)$ und $\arctan''(x)$ und geben Sie mittels dieser Ableitungen eine notwendige Bedingung für den Wendepunkt an.
- Es ist $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Berechnen Sie $\arctan''(x)$ und zeigen Sie, dass Ihre oben angegebene Bedingung erfüllt ist.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 9

Aufgabe 1:

- Berechnen Sie folgende Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-2^x}{2^x-2^2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{e^x-1}$.
- Berechnen Sie das Taylorpolynom vom Grad 5 der Funktion $f(x) = \cos(x)$ im Punkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 2:

In Anwesenheitsaufgabe 1 von Blatt 7 haben Sie die Lage der Nullstelle der Funktion $f(x) := x^3+3x-10$ mit Hilfe eines Intervallschachtelungsverfahrens bestimmt. Lösen Sie nun das gleiche Problem mit dem Newtonverfahren. Beginnen Sie dabei mit dem Startwert $x_0 = 2$ und berechnen Sie x_1 bis x_4 und runden Sie das Ergebnis auf 5 Stellen nach dem Komma.