Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 30.6.2015

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2015 — Blatt 10

Abgabe: bis Montag, den 6. Juli, 12 Uhr

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichungen und zeichnen Sie für die vorgegebenen Anfangswerte Lösungskurven ein.

- $u' = \frac{u}{2t}$, $u(1) = 1$ und $u(-1) = 1$.
- $u' = -\frac{u}{1+u}$ für (t, u) im ersten Quadranten (d.h. $t \geq 0$, $u \geq 0$) mit Anfangswert $u(0) = 3$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine konkrete Funktion $u(t)$ anzugeben, die die Differentialgleichung

$$u'(t) = u(t) + t,\ t \in \mathbb{R}$$

löst.

- Benutzen Sie dazu den Ansatz $u(t) = f(t)e^t$ und leiten Sie daraus eine Gleichung für f' her und berechnen Sie die Stammfunktion. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis für u. Hinweis: Die Stammfunktion von $g(x) = \frac{x}{e^x}$ ist $G(x) = -\frac{x+1}{e^x} + const.$
- Geben Sie nun die Funktion u an, die die Differentialgleichung mit dem gegebenen Anfangswert löst:

$$u'(t) = u(t) + t, \qquad u(0) = -1$$

Aufgabe 3: **4 Punkte**

- Lösen Sie die Differentialgleichung $u'(t) = \sin(t)u(t)$ mit $u(0) = 5$.
- Lösen Sie die Differentialgleichung $v'(t) = tv(t) + 2$ mit $v(0) = 2$.

Hinweis: Die dabei entstehenden Integrale können nicht immer explizit ausgerechnet werden.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

In einem Infektionsmodell bezeichne $I(t)$ den Anteil der zum Zeitpunkt t infizierten Individuen in einer Population (d.h. $0 \leq I(t) \leq 1$). Wir nehmen an, dass sich die Änderungsrate $I'(t)$ mit einem Proportionalitätsfaktor a proportional der Anzahl der Kontakte zwischen Infizierten und Nichtinfizierten $I(t)(1 - I(t))$ verhält. Zu Beobachtungsbeginn beträgt der Anteil der Infizierten $I(0) = I_0$. Formulieren Sie das zugehörige Anfangswertproblem und lösen Sie es mit den Ergebnissen aus der Vorlesung.
Tipp: es gilt $\frac{1}{I-I^2} = \frac{1}{I} + \frac{1}{1-I}$

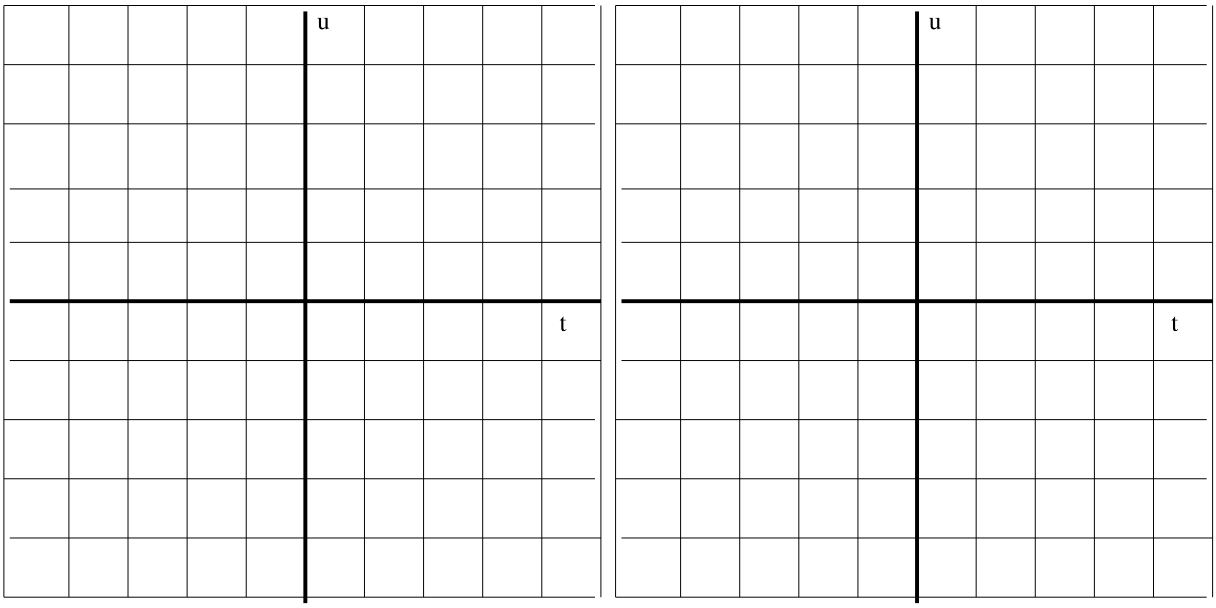
Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 10

Aufgabe 1:

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichungen und zeichnen Sie für die vorgegebenen Anfangswerte Lösungskurven ein.

a) $u' = t - u$, $u(0) = 0$, $u(0) = -1$ und $u(0) = -2$.

b) $u' = u^2 - 1$, $u(0) = 0$, sowie $u(0) = 1$ und $u(0) = 2$.



Aufgabe 2:

In einem Stromkreis sind eine zeitabhängige Spannungsquelle $U(t)$, ein konstanter Widerstand R und eine konstante Induktivität L hintereinandergeschaltet. Die Stromstärke $I(t)$ erfüllt dann die Differentialgleichung

$$LI'(t) + RI(t) = U(t).$$

Berechnen Sie $I(t)$ mit Hilfe der Lösungsformel und berechnen Sie das darin enthaltene Integral explizit im Fall konstanter Spannung $U(t) = U_0$.