Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 7.7.2015

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2015 — Blatt 11

Abgabe: bis Montag, den 13. Juli, 12 Uhr

Aufgabe 1: **8 Punkte**

Gegeben ist die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

- Zeigen Sie mit Hilfe des Exponentialansatzes $y(t) = e^{\lambda t}$, dass die Differentialgleichung die Lösung $y_1(t) = e^{-\frac{4}{2}t}$ besitzt.
- Rechnen Sie nach, dass $y_2(t) = te^{-\frac{4}{2}t}$ ebenfalls eine Lösung ist.
- Bestimmen Sie für die allgemeine Lösung

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

die Faktoren c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ so, dass $y(0) = 2$ und $y'(0) = 0$ gilt.

- Zeigen Sie, dass die Funktion y genau eine Nullstelle und genau ein Extremum besitzt.
- Skizzieren Sie den Graph von y.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Gegeben ist die nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$u' = \sin(u)$$

- Bestimmen Sie die stationären Punkte der Differentialgleichung und erörtern Sie mit Hilfe des Satzes aus der Vorlesung deren Stabilität.
- Finden Sie die Lösung von

$$u'(t) = \sin(u(t)), \quad u(0) = \pi$$

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$3u' + \frac{4}{t}u = -0,5t, \quad u(1) = 1$$

mit Hilfe der Lösungsformel aus der Anwesenheitsaufgabe.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 11

Aufgabe 1:

Gegeben ist die nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$u' = u^2 - u - 2$$

- Bestimmen Sie die stationären Punkte $\overline{u}_1$ und $\overline{u}_2$ der Differentialgleichung und entscheiden Sie mit Hilfe des Satzes aus der Vorlesung, ob die Punkte anziehend stabil oder instabil sind.
- Zeichnen Sie ein Richtungsfeld und zeichnen Sie mögliche Lösungskurven ein, um Ihre Antwort zu begründen.

Aufgabe 2:

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Lösungsformel:

$$u'(t) + \frac{u(t)}{t} = \frac{1}{t}, \;\; u(1) = 1.$$

Bemerkung: Beachten Sie $t_0 \neq 0$!

Im Fall $t_0 \neq 0$ lautet die Lösungsformel für die lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangswert $u(t_0) = u_0$:

$$u(t) = e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(\tau)} b(\tau)\, d\tau + u_0 e^{-A(t)}, \qquad t \geq t_0,$$

wobei $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau$. Für $t_0 = 0$ ist das gerade die Formel aus der Vorlesung.