Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 28.4.2015

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2015 — Blatt 2

Abgabe: bis Montag, den 4. Mai, 12 Uhr

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ zwei Punkte auf einer Sphäre mit Radius R ausgedrückt in Kugelkoordinaten, das heisst:

$$\mathbf{x} = R(\cos\varphi_x \sin\vartheta_x, \sin\varphi_x \sin\vartheta_x, \cos\vartheta_x)$$
$$\mathbf{y} = R(\cos\varphi_y \sin\vartheta_y, \sin\varphi_y \sin\vartheta_y, \cos\vartheta_y).$$

Sei nun $\mathbf{x}_{\text{Freiburg}} = (48°\text{N}, 7{,}8°\text{O})$ und $\mathbf{y}_{\text{Moskau}} = (55{,}7°\text{N}, 37{,}6°\text{O})$. Geben Sie für beide Städte die jeweiligen Kugelkoordinaten (R, ϑ, φ) an und benutzen Sie dazu $R = 6378$ km. Berechnen Sie das Skalarprodukt der resultierenden Ortsvektoren sowie den Winkel den sie einschließen. Berechnen Sie anschließend den Abstand zwischen Moskau und Freiburg, gemessen auf der Erdoberfläche. Denken Sie daran, Ihren Taschenrechner richtig einzustellen.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Seien $\mathbf{x} = (1, 1)$ und $\mathbf{y} = (1, -2)$ Vektoren im $\mathbb{R}^2$.

- Zeigen, dass $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ linear unabhängig sind.
- Stellen Sie die Vektoren $(3, 4), (-2, 1)$ und $(-2, 3)$ als Linearkombination von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ dar.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

- Zeigen Sie, dass die Menge

  $$\mathbb{L} := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x_1 + 4x_2 = 0 \right\}$$

  ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ ist und zeichnen Sie sie in ein Koordinatensystem ein.

- Zeigen Sie, dass die Menge

  $$\mathbb{P} := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 - 4x_2 = 0 \right\}$$

  kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ ist und zeichnen Sie sie in ein Koordinatensystem ein.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

- Zeichnen Sie die Mengen

$$\mathbb{L}_1 := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x_1 + 4x_2 = 5 \right\},$$
$$\mathbb{L}_2 := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -x_1 + 2x_2 = 0 \right\}.$$

- Lösen Sie nun das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

- Drücken Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des Gleichungssystems (1) mit Hilfe der Mengen $\mathbb{L}_1$ und $\mathbb{L}_2$ aus markieren Sie $\mathbb{L}$ in der Zeichnung zum ersten Aufgabenteil.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 2

Aufgabe 1:

- Sei $\mathbf{y} = (1, -2) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{L} := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \right\}$$

ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ ist und zeichnen Sie $\mathbb{L}$ in ein Koordinatensystem.

- Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{P} := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 1 \right\}$$

kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ ist und zeichnen Sie $\mathbb{P}$ in ein Koordinatensystem, indem Sie folgendermaßen vorgehen: Finden Sie zunächst einen speziellen Vektor $\mathbf{x_p} \in \mathbb{P}$ und $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $v_1 + v_2 = 0$. Machen Sie sich nun klar, dass alle Punkte $\{ \mathbf{x_p} + s\mathbf{v} \mid s \in \mathbb{R} \}$ in $\mathbb{P}$ liegen.

Aufgabe 2:

- Zeigen Sie: Für

$$\mathbf{x} = (\cos\varphi_x \sin\vartheta_x, \sin\varphi_x \sin\vartheta_x, \cos\vartheta_x)$$

gilt $\|\mathbf{x}\| = 1$.

- Berechnen Sie $\|\mathbf{x}\|$ für

$$\mathbf{x} = r(\cos\varphi_x \sin\vartheta_x, \sin\varphi_x \sin\vartheta_x, \cos\vartheta_x), \;\; r \in \mathbb{R}_+$$