Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 12.5.2015

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2015 — Blatt 4

Abgabe: bis Montag, den 18. Mai, 12 Uhr

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Entscheiden Sie für die folgenden Matrizen A, B, C, welche der Matrixprodukte AB, BA, AC, CA, BC, CB definiert sind und berechnen Sie diese ohne GTR.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Scherungsmatrix **4 Punkte**

Sei $A_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, für ein $a \in \mathbb{R}$.

- Brechnen Sie $A_a^2 = A_a A_a$ und $A_a^3 = A_a^2 A_a$ und A_a^{417}.
- Berechnen und skizzieren Sie $A_1\mathbf{v}$, $A_1^2\mathbf{v}$ und $A_1^3\mathbf{v}$ für $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Sei $Q = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [0, 1] \}$ ein Quadrat der Kantenlänge 1. Skizzieren Sie die Menge $R = \{ A_2\mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in Q \}$.
- Berechnen Sie die Fläche von R und vergleichen Sie sie mit der von Q. **Bemerkung:** Den Effekt den Sie dabei beobachten nennt man das "Cavalierische Prinzip".

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $L_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_D(\mathbf{w}) := D\mathbf{w}$, die von D induzierte lineare Abbildung. Eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt **orthogonal**, falls für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = L\mathbf{u} \cdot L\mathbf{v}. \tag{1}$$

Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, dass L_D orthogonal ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Zeigen Sie (1) zunächst für $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$.
- Beliebige Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ lassen sich Linearkombination $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ ausdrücken. Nutzen Sie nun die Linearität von L_D (Satz 7.28 im Skript) und die Eigenschaften Skalarprodukts (Satz 7.9 im Skript) aus, um (1) für beliebige $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ zu zeigen.
- Zeigen Sie $\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = \|D\mathbf{e}_1\| = \|D\mathbf{e}_2\|$.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

- Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Hilfe des Gauss'schen Eliminationsverfahrens und **ohne** Benutzung des GTR. Geben Sie dabei alle Zwischenschritte an.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 6 \\ -3x + 2y - z &= 2 \\ x + 2y + 3z &= 10. \end{aligned}$$

- Was bedeutet die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems anschaulich?

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 4

Aufgabe 1:

Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Zeigen Sie, dass für alle $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ eindeutige Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ existieren mit $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$.

- Sei $L_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_B(\mathbf{w}) := B\mathbf{w}$ die von B induzierte lineare Abbildung und $\mathbf{w}_0 = (2, 3)$. Finden Sie λ_0 und μ_0 mit $\mathbf{w}_0 = \lambda_0\mathbf{u} + \mu_0\mathbf{v}$ und zeigen Sie $L_B(\mathbf{w}_0) = L_B(\lambda_0\mathbf{u} + \mu_0\mathbf{v}) = \lambda_0 L_B(\mathbf{u}) + \mu_0 L_B(\mathbf{v})$.

Aufgabe 2:

- Welche Abbildung wird durch die Matrix $S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ beschrieben?

- Finden Sie Matrizen $S_2, S_3 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die die Spiegelung and der x-bzw. and der y-Achse beschreiben.

- Finden Sie eine Matrix $S_4 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die die Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden beschreibt.

- Skizzieren Sie anschließend die Bildmengen

$$S_i(Q) = \left\{ S_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Q \right\}, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

wobei

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x, y \in [0, 1] \right\}$$

das Quadrat der Kantenlänge 1 sei.