Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 19.5.2015

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2015 — Blatt 5

Abgabe: bis Montag, den 1. Juni, 12 Uhr

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &+ x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad &+ x_3 &= b_2 \\ x_1 - x_2 \quad &- 2x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

- Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass Sie das Gleichungssystem in der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ schreiben können, wobei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.
- Bestimmen Sie A^{-1}.
- Bestimmen Sie für die gegebenen rechten Seiten

$$(i)\, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (ii)\, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (iii)\, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

  die Lösungen $\mathbf{x}$ des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, indem Sie den zweiten Teil der Aufgabe verwenden.

Aufgabe 2: **4+2 Punkte**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Geben Sie das charakteristische Polynom $\mathcal{P}(\lambda)$ an und bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A
- Zeigen Sie: Eigenwerte λ, μ von Matrizen der Form

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

  sind gegeben durch $\lambda = a + b$ und $\mu = a - b$

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei folgende Leslie-Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0,1 & 1,4 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

- Rechnen Sie nach, dass

  $$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

  Eigenvektoren von L sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

- Wie wird sich eine Population mit der Anfangsverteilung $\mathbf{a}_0 = (39, 5, 30)$ langfristig entwickeln? **Anleitung:** Stellen Sie $\mathbf{a}_0$ als Linearkombination von $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ dar. Mit dieser Darstellung können Sie entscheiden, wogegen $L^n\mathbf{a}_0$ für $n \to \infty$ konvergiert.

Aufgabe 4: **6 Punkte**

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie die Determinanten von A, B, D_π und von $AB, BA, D_\pi B$.

Knobelaufgabe: **4 Punkte**

- Zeigen Sie, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind.

- Begründen Sie durch ein geometrisches Argument, warum die Matrix

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  keine reellen Eigenwerte besitzt.

Hinweis: Sie können auf diesem Blatt 10 Bonuspunkte sammeln. Die Anwesenheitsaufgaben hatten leider keinen Platz mehr auf diesem Blatt und werden daher den Tutoren direkt gegeben. Die Tutorate finden selbstverständlich auch diese Woche statt.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 5

Aufgabe 1: **4 Punkte**

- Bestimmen Sie die Inverse Matrix A^{-1} von
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
- Bestimmen Sie die Inverse Matrix B^{-1} von
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
- Bestimmen Sie die Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung $B\mathbf{x} = \mathbf{c}_i$ für $\mathbf{c}_1 = (1, 2, 2)$ und $\mathbf{c}_2 = (1, 0, 1)$.

Aufgabe 2:
Sei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.
- Berechnen Sie die Eigenwerte von A.
- Geben Sie zugehörige Eigenvektoren in parametrisierter Form an.

Hinweis: geht bitte die notwendigen Schritte zur Berechnung von Eigenwerten in diesem Beispiel detailliert durch!