Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 2.6.2015

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2015 — Blatt 6

Abgabe: bis Montag, den 8. Juni, 12 Uhr

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Eine Ellipse mit den Halbachsen a und b wird beschrieben durch die Menge $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. Gegeben seien außerdem der Einheitskreis $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| x^2 + y^2 \leq 1\}$, sowie die Matrix $A := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

- Zeigen Sie, dass die Matrix A den Einheitskreis auf die Ellipse mit Halbachsen a und b abbildet, d.h. für ein beliebiges $\mathbf{v} \in K$ gilt $A\mathbf{v} \in E$.
- Berechnen Sie mit Hilfe der Formel

  $$F_E = F_K \det A$$

  den Flächeninhalt der Ellipse mit Halbachsen 2 und 3. Dabei bezeichnet F_E den Flächeninhalt der Ellipse und F_K den Flächeninhalt des Einheitskreises.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Berechnen Sie zu den Zahlen $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = \frac{2-i}{2}$ und $z_3 = -2 + 3i$ die folgenden Ausdrücke und geben Sie die Ergebnisse in der Form $z = x + iy$ an:

- $z = \frac{1}{z_3}$
- $z = \overline{z_1 z_2}$
- $z = \frac{z_1+z_2}{z_1 z_2}$
- $z = z_1^3 + z_2^2$

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Zeigen Sie: Für $z = x + iy$ gilt $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

- Finden Sie alle Lösungen zu den quadratischen Gleichungen:

  (i) $z^2 + 4z + 20 = 0$.

  (ii) $\frac{5}{6}z^2 = \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}$.

- Finden Sie die Lösung $z = x + iy$ der Gleichung $\frac{20z-20i}{1-i} = 10z - 30$.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 6

Aufgabe 1:

Zeichnen Sie

- $z_1 = 1 + 2i$ und für $k \in \{1, 2, 3\}$ $z_{k+1} := iz_k$,
- $c = -2 - 4i$, $d = -3 + 2i$ und $c + d$, $c - d$ sowie $\overline{c}$ und cd.

Aufgabe 2:

- Gegeben $z = 2 + 3i$, berechnen Sie z^2, $\frac{i}{z}$ und z^{-1} und geben Sie das Ergebnis in der Form $x + iy$ an.
- Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

  i) $z^2 - 2z + 2 = 0$.

  ii) $25z^2 + 10z + 16 = 0$.

  iii) $z^2 - \frac{5}{2}z + \frac{3}{2} = 0$.