Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 9.6.2015

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2015 — Blatt 7

Abgabe: bis Montag, den 15. Juni, 12 Uhr

Aufgabe 1: **4 Punkte**

- Geben Sie zu den komplexen Zahlen $z = 3+2i$ und $z = \sqrt{5}+\sqrt{3}i$ jeweils die Polarkoordinatendarstellung an und berechnen Sie ihr Produkt.
- Geben Sie $z = 2e^{-4i}$ und $z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ in der kartesischen Form $z = x + iy$ an.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Betrachten Sie eine Uhr mit Radius eins. Drücken Sie die Position der vollen Stunden mittels Polarkoordinaten und in der Form $x + iy$ aus . Tipp: Minimieren Sie Ihren Rechenaufwand, indem Sie sich zunächst überlegen, welche Symmetrieeigenschaften das Problem hat. Außerdem dürfen Sie die unten angegebene Tabelle verwenden.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Gesucht ist die Zahl $z \in \mathbb{C}$, die $z^2 = -i$ erfüllt.

- Veranschaulichen Sie sich die Situation zunächst anhand einer Zeichnung und lesen Sie anhand der geometrischen Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen z ab.
- Prüfen Sie Ihr Ergebnis anhand einer Rechnung.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Gegeben Sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Berechnen Sie die komplexen Eigenwerte λ_+ und λ_- von A.
- Rechnen Sie nach, dass $\mathbf{v}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ ein Eigenvektor zu λ_+ und $\mathbf{v}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ ein Eigenvektor zu λ_- ist. Notieren Sie dazu zunächst die Gleichung, die für einen Eigenvektor $\mathbf{v}$ zu einem Eigenwert λ gelten muss.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 7

Aufgabe 1:

- Zeichnen Sie $z_1 = 3(\cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2}))$ und geben Sie z_1 in der Form $x + iy$ an.
- Zeichnen Sie $z_2 = 1 + i$ und $z_3 = 1 - i$ und bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung der beiden Zahlen.

Aufgabe 2:

Stellen Sie die Vektoren $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4+6i \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ und $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ in der Form $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k + i\mathbf{w}_k$, $k = 1, 2$ mit $\mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^2$ dar. Berechnen Sie anschließend $A\mathbf{v}_1$ und $A\mathbf{v}_2$ nach der Regel

$$A\mathbf{v}_k = A\mathbf{u}_k + iA\mathbf{w}_k, \qquad k = 1, 2,$$

wobei A die Matrix aus Aufgabe 4 ist.