Dr. Susanne Knies, Dr. Hannah Bergner 21.12.2015

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2015/16 — Blatt 10

Abgabe: bis Montag, den 11. Januar 2016 um 14 Uhr

Sie dürfen maximal 6 dieser 10 Aufgaben abgeben: Aufgabe 1-3 und drei Aufgaben Ihrer Wahl der Aufgaben 4-10. Es können also 24 Punkte erzielt werden aus diesem Blatt, gewertet wird das Blatt jedoch nur mit 16 Punkten, d.h. 8 Bonuspunkte sind möglich.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Es seien $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = e^x$.

1. Berechnen Sie die Taylorpolynome $P^4_{f,0}$ und $P^4_{g,0}$ vierter Ordnung zu f und g im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

2. Finden Sie Formeln für $P^n_{f,0}$ und $P^n_{g,0}$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. (Tipp: Verwenden Sie $|\sin'(z)| = |\cos(z)| \leq 1$)

2. Beweisen Sie, dass die Gleichung $\ln(x) + 2 = x$ eine Lösung hat. (Tipp: Zwischenwertsatz)

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Bestimmen Sie Minima, Maxima und Wendepunkte der Funktionen

$$f(x) = e^{2x} - 2e^{x+1} + 1 \quad \text{und} \quad g(x) = (\sin(x))^3.$$

(Tipp: Zeigen Sie u.a. $g''(x) = 3\sin(x)(3(\cos(x))^2 - 1)$.)

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Gegeben seien die Funktionen

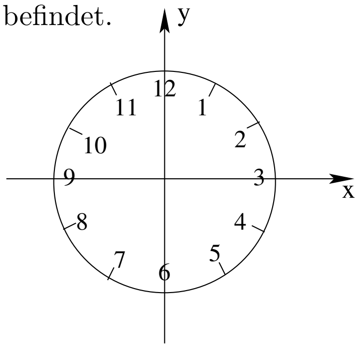
$$f(x) = \frac{x-5}{x^3 + 2x^2} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}.$$

1. Bestimmen Sie die Definitionsbereiche, Nullstellen und Polstellen von f und g. Bei welchen Polstellen liegen Vorzeichenwechsel vor?

2. Geben Sie das asymptotische Verhalten von f und g für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an. Um das Verhalten von g zu bestimmen, zeigen Sie zuerst, dass $g(x) = x + \frac{1}{x-2}$.
Skizzieren Sie dann (ohne GTR) Schaubilder der Graphen von f und g.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Auf der Skizze ist das Ziffernblatt einer Uhr mit Radius 1 in ein Koordinatensystem eingezeichnet - und zwar so, dass sich der Mittelpunkt der Uhr am Ursprung (0/0) befindet. Die Markierung für 12 Uhr befindet sich also am Punkt (0/1), die für 3 Uhr an (1/0), 6 Uhr an (0/−1) und 9 Uhr an (−1/0). Berechnen Sie ohne Taschenrechner die Koordinaten der restlichen Stundenmarkierungen. Verwenden Sie dabei ausschließlich $\sin 30° = \frac{1}{2}$ und den Satz des Pythagoras.
Bemerkung: Auch $\sin 30° = \frac{1}{2}$ lässt sich ohne Taschenrechner aus dem Satz des Pythagoras berechnen.



Aufgabe 6: **4 Punkte**

1. Eine Basketballmannschaft besteht aus 9 Spielerinnen. Wie viele Möglichkeiten hat die Trainerin, 5 Startspielerinnen auszuwählen?

2. Zur Sylvesterparty haben Sie für Ihre Gäste drei verschiedene Sorten Bier gekauft, von jeder Sorte 20 Flaschen. Das Bier soll im Kühlschrank kalt gestellt werden. Dort ist jedoch nur Platz für 12 Flaschen. Wie viele Möglichkeiten gibt es 12 Flaschen auszuwählen? (Tipp: Inwiefern ist es relevant, dass Sie 20 Flaschen von jeder Sorte haben?)

Aufgabe 7: **4 Punkte**

Gegeben seien die Folgen

$$a_n = \left(3 + \frac{2}{n^2}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) \quad \text{und} \quad b_n = a_n + \frac{17n+1}{34n}$$

1. Untersuchen Sie die Folgen a_n und b_n auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert, falls dieser existiert.

2. Schreiben Sie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2048}$ mit Summenzeichen, d.h. in der Form $\sum_{k=0}^{n} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, und berechnen Sie die Summe.

Aufgabe 8: (Bei dieser Aufgabe ist ein Taschenrechner erlaubt.) **4 Punkte**

Ein Turmspringer springt von einem 10m Turm in ein Sprungbecken und dabei zunächst mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach oben. Unter Vernachlässigung des Luftwiderstands kann man die Höhe des Springers in Abhängigkeit von der Zeit t mit der Formel $H(t) = v_0 t - \frac{g}{2}t^2 + 10m$ berechnen. Hierbei bezeichnet $g := 10\frac{m}{s^2}$ (stark gerundet) die Gravitationskonstante.

1. Skizzieren Sie $H(t)$ und geben Sie in Abhängigkeit von v_0 die Zeit T an, zu welcher der Springer auf der Wasseroberfläche aufkommt.

2. Wann passiert der Springer bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 5\frac{m}{s}$ die Sprungbretter in Höhe von 7, 5 und 3 Metern?

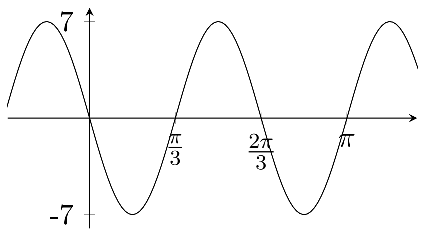
3. Bringen Sie H in Scheitelpunktsform. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_0 muss der Springer hoch springen, um eine maximale Höhe von $11,5$ m zu erreichen?

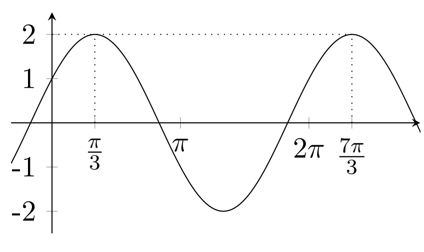
Aufgabe 9: (Bei dieser Aufgabe ist ein Taschenrechner erlaubt.) **4 Punkte**

Frosch Hugo ist ein alter Hase unter den Fröschen und außerdem frisch verliebt. Leider trennt ihn eine 10 Meter breite, dafür aber völlig unbefahrene Straße von seiner neuen Angebeteten. Hugo ist sich sicher, dass sich seine Sprungkraft mit jedem Sprung um 10% verringert. Von früheren Dates weiß er zwar, dass sein dritter Sprung 1,62 Meter weit sein wird, er weiß aber auch, dass er in seinem Alter nur noch maximal sieben Sprünge vollführen kann. Hat diese Liebe eine Chance? Begründen Sie Ihre Antwort. Tipp: Kann Hugo die Weite seines ersten Sprungs berechnen?

Aufgabe 10: **4 Punkte**

Finden Sie Funktionen f und g, deren Graphen wie folgt aussehen:





Erläutern Sie, wie die Parameter der Funktionsvorschriften das Verhalten der Graphen beeinflussen.

Wir wünschen Ihnen erholsame Feiertage, einen guten Rutsch und weiterhin viel Spaß und Erfolg für Ihr Studium!