Dr. Susanne Knies, Hannah Bergner 11.01.2016

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Webseite zur Vorlesung: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

WS 2015/16 — Blatt 11

Abgabe: bis Montag, den 18. Januar 2016 um 14 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1

Aufgabe 1 (Ellipsengleichung): **4 Punkte**

Es seien a und b reelle Zahlen mit $a > 0$ und $b > 0$. Die Menge der Punkte $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ in der Ebene, die die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \tag{1}$$

erfüllen, ist eine Ellipse.

1. Zeigen Sie, dass die Bildpunkte der Kurve

   $$\vec{z} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \vec{z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix},$$

   Punkte der Ellipse sind, d.h. zeigen Sie dass alle Punkte $\vec{z}(t)$ Gleichung (1) erfüllen. (Die Kurve $\vec{z}$ liefert eine Parametrisierung der Ellipse.)

2. Skizzieren Sie Ellipsen in den beiden Fällen $a = 2$, $b = 1$, und $a = b = 2$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

1. Finden Sie eine Parametrisierung des Kreises in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $\binom{2}{3}$ und Radius 5 und skizzieren Sie diesen Kreis.

2. Skizzieren Sie das Bild der logarithmischen Spirale

   $$3e^{-t}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 4\pi].$$

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_1^4 \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4(\sin(x) + 2x^3)\, dx$$

$$\int_{-1}^0 (1 + e^{-x} + e^x)\, dx, \qquad \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

Aufgabe 4 (Newtonsches Abkühlungsgesetz): **4 Punkte**

Befindet sich ein Gegenstand der Anfangstemperatur $u(0) = u_0$ in einem Raum mit konstanter Temperatur a, so wird die Temperaturänderung des Gegenstands durch die Gleichung

$$u'(t) = -k(u(t) - a),\ t > 0, \qquad u(0) = u_0 \qquad (*)$$

beschrieben. Dabei ist u_0 die Anfangstemperatur des Gegenstands, a ist die konstante Raumtemperatur, k die konstante Abkühlungsrate und $u(t)$ die Temperatur des Gegenstands zum Zeitpunkt t.

- Zeigen Sie, dass die Funktion $u(t) = a + (u(0) - a)e^{-kt}$ die Gleichung $(*)$ löst.

- Sie haben 150 ml $85°\,C$ heißen Kaffees und 50 ml $10°\,C$ kalter Milch und möchten einen Milchkaffee trinken. Da Sie nur wenig Zeit haben, sollte der Kaffee so schnell wie möglich auf Trinktemperatur ($58°C$) abkühlen. Ist es sinnvoller, zuerst die Milch mit dem Kaffee zu vermischen und dann zu warten, oder sollten Sie die Milch lieber erst am Ende in den Kaffee geben? Nehmen Sie $k = 0,025\frac{1}{min}$ und $a = 20°\,C$ an und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Hinweis: Die Vermischung einer Kaffeemenge p mit der Temperatur u_K und einer Milchmenge q mit einer Temperatur u_M führt sofort dazu, dass die Mischungsmenge $p + q$ die Temperatur $\frac{pu_K + qu_M}{p+q}$ hat.