

Mathematik I für NaturwissenschaftlerWebseite zur Vorlesung: <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/>**WS 2015/16 — Blatt 12****Abgabe: bis Montag, den 25. Januar 2016 um 14 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1****Aufgabe 1:****3 Punkte**

Berechnen Sie mit Hilfe der angegebenen Substitution:

$$\int_a^b \left(\frac{x - \beta}{\alpha} \right)^3 dx \quad \text{mit} \quad g(x) = \frac{1}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha}$$

Was erhalten Sie, wenn $a = \beta$, $b = 2\alpha + \beta$, $\alpha = \frac{1}{4}$ und $\beta = 2$?**Aufgabe 2:****3 Punkte**

1. Berechnen Sie

$$I_R = \int_0^R \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

mit Hilfe von partieller Integration. (Tipp: Welcher Teil des Integranden $\lambda x e^{-\lambda x}$ vereinfacht sich, wenn man ableitet?)2. Existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx$, d.h. existiert der Grenzwert $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \lambda x e^{-\lambda x} dx$? Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.**Aufgabe 3:****4 Punkte**

Ein (gekipptes) Sektglas entstehe durch Rotation des Graphen der Wurzelfunktion

$$f(x) = \sqrt{ax},$$

 $x \in [0, h]$, $a > 0$, um die x -Achse.

- Skizzieren Sie $f(x) = \sqrt{ax}$. Stellen Sie sich vor, dieser Graph rotiere um die x -Achse und erläutern Sie, warum die Fläche des Querschnittes dieses Rotationskörpers gegeben ist durch $\pi(f(x))^2$.
- Berechnen Sie anhand der Formel ¹

$$V(h) = \pi \int_0^h (f(x))^2 dx,$$

wieviel Flüssigkeit ein bis zur Höhe $h \geq 0$ befülltes Sektglas enthält.

- Wie hoch muss (für $a = \frac{2}{\pi} cm$) ein Sektglas sein, damit das Volumen $100ml$ beträgt? (Erinnerung: $ml = (cm)^3$)

¹Diese Formel berechnet allgemein das Volumen von Rotationskörpern, welche durch den Graphen von f begrenzt werden.

Aufgabe 4:**6 Punkte**

Nach einer Operation erhält ein Patient eine Infusion. Die Dosierung ist durch die Funktion

$$f(t) = 1 + bte^{kt}$$

beschreiben, d.h. der Patient erhält zum Zeitpunkt t die Zufuhr $f(t)$ des Medikaments pro Stunde in mg/h. Der Parameter $t \in [0, 24]$ ist hierbei die Zeit in Stunden. Es gelte $b = e$ und $k = -\frac{1}{4}$.

1. Welche Menge des Medikaments wird insgesamt verabreicht, wenn die Infusion 24 Stunden angelegt ist?
2. Zu welchem Zeitpunkt ist die Dosierung maximal und wie groß ist diese maximale Dosierung?
3. Zu welchem Zeitpunkt ist die Abnahme der Dosierung am stärksten?

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 12**Aufgabe 1:**

- Berechnen Sie mit Hilfe partieller Integration:

$$\int_2^{10} \sqrt{x-1} \ln(x-1) dx$$

- Berechnen Sie mit Hilfe des ln-Tricks:

$$\int_1^3 \frac{x+1}{x^2+2x} dx$$

- Berechnen Sie mit Hilfe der angegebenen Substitution:

$$\int_a^b x \sin(x^2) dx, \quad \text{mit } f(y) = \sin(y) \text{ und } g(x) = x^2$$

Aufgabe 2:

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gerade Funktion und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion, d.h. $f(x) = f(-x)$ und $g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Machen Sie Sich mit Hilfe geeigneter Skizzen klar:

- Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.
- Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\int_{-a}^a g(x) dx = 0$.
- Welche der Funktionen aus Anwesenheitsaufgabe 1 sind gerade bzw. ungerade?