Dr. Susanne Knies, Hannah Bergner 25.01.2016

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Webseite zur Vorlesung: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

WS 2015/16 — Blatt 13

Abgabe: bis Montag, den 1. Februar 2016 um 14 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1

Aufgabe 1: **6 Punkte**

1. Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral
$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^s}\,dx$$
für $s \in [0,1)$ existiert und berechnen Sie den Wert.

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale:
$$\int_1^2 \frac{-3x^2+8x-3}{-x^3+4x^2-3x+1}\,dx$$
$$\int_{-1}^0 \left(\cosh(x) + \frac{1}{x-1} + e^{-x}\right)dx$$

3. Finden Sie eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$, sodass $I_c = 1$ gilt, wobei wir I_c definieren als
$$I_c = c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Tipps: $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Sie werfen dreimal mit einer gezinkten Münze für die gilt $P(\text{Kopf}) = 1/3$ und $P(\text{Zahl}) = 2/3$. Wie wahrscheinlich ist es, dass mindestens einmal das Symbol "Kopf" erscheint? Wie wahrscheinlich ist es, dass in genau zwei von drei Würfen das gleiche Symbol erscheint? Formulieren Sie hieraus eine Ergebnismenge Ω und Ereignisse E_1 und E_2, die Sie jeweils in Worten und Mengennotation beschreiben. Benutzen Sie auch ein Baumdiagramm, um sich das Experiment zu veranschaulichen.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Stellen Sie sich vor, Sie würfeln einmal mit einem idealen Würfel. Die Ergebnismenge Ω ist dann $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Gegeben seien außerdem die Ereignisse

$$A = \{\text{"Die Zahl ist gerade"}\},$$
$$B = \{\text{"Die Zahl ist größer oder gleich 2"}\},$$
$$C = \{\text{"Die Zahl ist gerade und größer oder gleich 2"}\}.$$

- Geben Sie die Ereignisse A, B und C in aufzählender Mengenschreibweise an und berechnen Sie $P(A)$, $P(B)$ und $P(C)$.
- Sie würfeln eine Zahl, die größer oder gleich 2 ist, d.h. Ereignis B tritt ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Zahl außerdem gerade ist, d.h. dass auch Ereignis C eintritt? Tipp: Benutzen Sie die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Für eine Studie über die Wirksamkeit von Grippeschutzimpfungen wurden 960 Personen danach befragt, ob sie vor dem letzten Winter gegen Grippe geimpft waren und ob sie an Grippe erkrankt waren oder nicht. Die Daten wurden nach geimpft/nicht geimpft und erkrankt/nicht erkrankt ausgezählt, so dass sich folgende Tabelle ergab:

	erkrankt	nicht erkrankt	
geimpft	117	389	506
nicht geimpft	289	165	454
$\sum$	406	554	960

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

a) $A = \{$ "war geimpft" $\}$

b) $B = \{$ "hatte Grippe" $\}$

c) Berechnen Sie $P(A \cap B)$ und $P(B \mid A)$ und erklären Sie in eigenen Worten, was diese Wahrscheinlichkeiten bedeuten.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 13

Aufgabe 1:

Geben Sie für die folgenden zwei Spiele jeweils die Ergebnismengen Ω_a und Ω_b, sowie $|\Omega_a|$ und $|\Omega_b|$ an.

- Spiel a: "Würfeln Sie mit einem roten und einem blauen Würfel und schauen Sie auf die möglichen Zahlenpaare der oben liegenden Flächen."
- Spiel b: "Würfeln Sie mit zwei nicht unterscheidbaren Würfeln und schauen Sie auf die Summe der Zahlen auf den oben liegenden Flächen."
- Welche der Spiele sind Laplace-Experimente?
- Berechnen Sie für das Spiel a die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
  - E_1: Es wird mindestens eine 3 gewürfelt.
  - E_2: Die Augensumme der beiden gewürfelten Zahlen ist 10 oder größer.
  - E_3: Die gewürfelte Zahl des roten Würfels ist kleiner als 3.
  - E_4: Die gewürfelte Zahl des blauen Würfels ist gerade.
  - E_5: Die gewürfelte Zahl des blauen Würfels ist gerade und die des roten ist ungerade.
  - E_6: Die Ereignisse E_3 und E_4 treten ein.
- Berechnen Sie auch, die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl des roten Würfels kleiner als 3 ist, falls die Zahl des blauen Würfels gerade ist, d.h. berechnen Sie $P(E_3|E_4)$. Vergleichen Sie diese Wahrscheinlichkeit mit der Wahrscheinlichkeit $P(E_3)$ des Ereignisses E_3.