Dr. Susanne Knies, Hannah Bergner 09.11.2015

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Webseite zur Vorlesung: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

WS 2015/16 — Blatt 4

Abgabe: bis Montag, 16. den 2015 um 14 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1

Aufgabe 1: **5 Punkte**

1. Entscheiden und begründen Sie, welche der Folgen a_n, b_n und c_n konvergieren und bestimmen Sie den Grenzwert, falls dieser existiert.

$$a_n := \frac{3n^2+2n+1}{(n+7)(n+2)} \ , \qquad b_n := \frac{n^3+4n+4}{(n+1)(n+2)} \ , \qquad c_n := \frac{n+7}{n^2+2n+3}$$

2. Zeigen Sie, dass die Folge

$$d_n := \frac{(-1)^n}{n}$$

gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Es sei $a_n := \frac{1}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie zwei verschiedene Folgen b_n, so dass gilt:

1. Die Folge $\frac{a_n}{b_n}$ ist eine Nullfolge.
2. Die Folge $\frac{a_n}{b_n}$ divergiert.

Erklären Sie, warum das gefundene Beispiel in 2. keinen Widerspruch zum zweiten Konvergenzsatz aus der Vorlesung darstellt.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Durch die Nuklearunfälle von Fukushima 2011 wurden unter anderem die radioaktiven Stoffe Jod 131 und Cäsium 137 freigesetzt. Die Halbwertszeit beim radioaktiven Zerfall ist die Zeitspanne, in der die Menge und damit auch die Aktivität eines gegebenen Radionuklids durch den Zerfall auf die Hälfte gesunken ist. Jod 131 hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen und Cäsium 137 von etwa 30 Jahren.

1. Wieviel Prozent des freigesetzten Jod 131 sind nach zehn Wochen noch übrig?
2. Wieviele Jahre dauert es ungefähr, bis nur noch ein Fünfhundertstel der freigesetzten Menge Cäsium 137 übrig ist?

(Tipp: geometrische Folge, und $2^9 \approx 500$.)

bitte wenden!

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Reihen. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse dabei soweit wie möglich.

1. $\sum\limits_{k=0}^{9} 2^k$

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k$

3. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 8 \left(\frac{1}{2}\right)^k$

4. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k}$

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 4

Aufgabe 1

1. Schreiben Sie $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$ in der Form $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$.

2. Leiten Sie aus der Formel $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ eine explizite Formel für $\sum\limits_{k=1}^{n} (a+kb)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ her.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die eingefärbte Fläche, indem Sie die Formel für die geometrische Reihe aus der Vorlesung benutzen. Lässt sich das Ergebnis auch anschaulich interpretieren?
Tipp: Wie groß sind die Flächeninhalte der dunkler eingefärbten Flächen? Und wie groß die der helleren Flächen?