

# Mathematik I für Naturwissenschaftler

Webseite zur Vorlesung: <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/>

## WS 2015/16 — Blatt 5

Abgabe: bis Montag, den 23. November 2015 um 14 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1

### Aufgabe 1:

**4 Punkte**

Geben Sie für die folgenden beiden Funktionen jeweils die Umkehrfunktion an und prüfen Sie nach, dass  $f^{-1}(f(x)) = x$  und  $f(f^{-1}(y)) = y$  gilt:

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := \frac{3}{2}x - 2$ .
2.  $f : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ ,  $f(x) := \frac{x^2}{2} + 1$ .

Zeichnen Sie die Funktionen und Ihre jeweilige Umkehrfunktion. Fällt Ihnen ein geometrischer Zusammenhang zwischen den Graphen auf?

### Aufgabe 2:

**4 Punkte**

Bei der Enzymkatalyse wird die Reaktionsgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Konzentration vereinfacht beschrieben durch die Michaelis-Menten-Gleichung

$$v(s) = \frac{v_{max} s}{K_m + s}. \quad (1)$$

Hier bezeichnet die Variable  $s$  die Konzentration und  $v_{max} > 0$  die maximale Reaktionsgeschwindigkeit und  $K_m$  die Michaeliskonstante des Enzyms.

- Invertieren Sie die Gleichung (1) und leiten Sie eine lineare Gleichung

$$y = mx + c$$

für die neuen Variablen  $x = \frac{1}{s}$  und  $y = \frac{1}{v(s)}$  her. Der Graph dieser neuen Funktion  $y(x)$  ist nun eine Gerade.

- Mittels Ihrer neuen Gleichung wollen Sie nun die Parameter  $v_{max}$  und  $K_m$  für ein bestimmtes Enzym experimentell bestimmen. Ihnen stehen hierzu zwei Messwertpaare  $(s_1, v_1) = (\frac{1}{10}, \frac{1}{25})$  und  $(s_2, v_2) = (\frac{2}{10}, \frac{2}{45})$  zur Verfügung. Finden Sie zuerst eine Formel für die Steigung  $m$  der Geraden in Abhängigkeit der Messwerte. Bestimmen Sie dann die Gleichung der Geraden und ermitteln Sie dann aus  $m$  und  $c$  die Parameter  $v_{max}$  und  $K_m$ .

### Aufgabe 3:

**4 Punkte**

1. Finden Sie ein Polynom  $P$  zweiten Grades, das symmetrisch zur  $y$ -Achse ist, an der Stelle  $x_0 = 1$  eine Nullstelle besitzt und dessen Graph durch den Punkt  $(0, 5)$  geht.
2. Rechnen Sie nach, dass das gefundene Polynom  $P$  gerade ist.

**bitte wenden!**

**Aufgabe 4:****4 Punkte**

- Berechnen Sie

$$S_6 := \sum_{k=1}^6 \frac{1}{k(k+1)}.$$

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 3.2 von Blatt 1 und schreiben Sie dann die Summe aus.

- Finden Sie eine Formel für

$$S_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Konvergiert  $S_n$  für  $n \rightarrow \infty$ ? Wenn ja, so berechnen Sie den Grenzwert.

**Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 5****Aufgabe 1:**

Es seien die Funktionen  $h(x) := \frac{x}{x^2+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  und  $k(x) := x^2 + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  gegeben.

- Sind die Funktionen gerade oder ungerade?

**Aufgabe 2:**

- Geben Sie eine Parabel an, deren Nullstellen bei  $x = -1$  und  $x = 3$  liegen. Ist diese Parabel eindeutig bestimmt?
- Rechnen Sie nach, dass sich die Funktion  $f(x) := ax^2 + bx + c$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  schreiben lässt als

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Bemerkung: Diese Darstellung heißt **Scheitelpunktsform** und kann mittels quadratischer Ergänzung hergeleitet werden.

- Schreiben Sie Ihre Parabel aus dem ersten Aufgabenteil in Scheitelpunktsform und machen Sie sich klar, dass der Graph der Funktion symmetrisch bezüglich der Geraden parallel zur  $y$ -Achse durch den Scheitelpunkt ist. Was können Sie daraus über die Lage der Nullstellen (sofern vorhanden) und des Extremwerts der Parabel aussagen?
- Durch Variation welcher Parameter wird der Graph einer Funktion
  - an der  $x$ -Achse gespiegelt?
  - an der  $y$ -Achse gespiegelt?
  - in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung verschoben?