Dr. Susanne Knies, Hannah Bergner 23.11.2015

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Webseite zur Vorlesung: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

WS 2015/16 — Blatt 6

Abgabe: bis Montag, den 30. November 2015 um 14 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Für $0 < \alpha < \infty$ und $0 < f_0 < K$ sei die Gompertz-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) := Ke^{\left(\ln\left(\frac{f_0}{K}\right)e^{-\alpha t}\right)}.$$

- Berechnen Sie $f(0)$.
- Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}$ und berechnen Sie das Vorzeichen von $\ln\left(\frac{f_0}{K}\right)$.
- Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} f(t)$ und $\lim_{t\to-\infty} f(t)$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Gegeben seien die gebrochen rationalen Funktionen

$$f(x) := \frac{x}{x^2-4x-5},\quad g(x) := \frac{3x^2-4x+1}{x^2-4x-5},\quad h(x) := \frac{(x-2)(x+3)(x-4)}{x^2-5x}.$$

- Bestimmen Sie für f, g und h jeweils den Definitionsbereich und berechnen Sie die Nullstellen und die Polstellen der Funktionen. Liegen bei den Polstellen Vorzeichenwechsel vor?
- Zeigen Sie, dass für die Funktion h gilt:
$$h(x) = x + 2 + \frac{24}{x^2-5x}.$$
- Geben Sie das asymptotische Verhalten von f, g und h für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an. Tipp: Benutzen Sie für die Funktion h Teil 2.
- Skizzieren Sie die Schaubilder (ohne GTR!).

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Vereinfachen Sie die folgenden Terme ohne Taschenrechner soweit wie möglich:

- $\ln(3e^5) - \ln 6 + 2\ln 2$
- $\ln(\sqrt{2e})e^{\ln 2 + 4}\frac{1}{e^{-2}}$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen ohne Taschenrechner nach x auf und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich:

- $e^{6x}e^{2x+7}e^{-7} = e^x$
- $\ln x^7 + \ln(\frac{x}{3}) - 7\ln x = 1$

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Ein Gen liege in einer Population in zwei Varianten vor, den Allelen A und B, welche mit Häufigkeit p (für A) und $q = 1 - p$ (für B) auftreten. Die Wahrscheinlichkeiten für einen Organismus die Allelkombinationen AA, AB bzw. BB zu haben sind somit p^2, $2pq$ bzw. q^2. Die Funktion

$$H(p) = 2pq = 2p(1 - p)$$

beschreibt den Anteil der heterozygoten Organismen (d.h. der Träger der Allelkombination AB) in der Population in Abhängingkeit von p.

1. Bringen Sie die Parabel H auf Scheitelpunktform.

2. Bestimmen Sie (mit Hilfe der Scheitelpunktform von H) wie hoch der Anteil der heterozygoten Organismen in der Population maximal sein kann.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 6

Aufgabe 1:

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

- $\ln(2x) + \ln(2y) - \ln z - \ln 4$
- $\ln(x^2 - y^2) + \ln(\frac{1}{x-y})$

Aufgabe 2:

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) := \frac{x}{x^2 - 2} \quad \text{und} \quad v(s) := \frac{v_{\max} s}{K_m + s},$$

wobei $v_{\max} > 0$ und $K_m > 0$ Konstanten sind (vgl. Blatt 5, Aufgabe 2).

- Geben Sie den Definitionsbereich von f und v an und untersuchen Sie die Graphen von f unf v auf Symmetrie.

- Bestimmen Sie die Polstellen von f und v. Liegt an den Polstellen ein Vorzeichenwechsel vor? Begründen Sie Ihre Antwort. Untersuchen Sie dann das asymptotische Verhalten von f für $x \to \pm\infty$ und von v für $s \to \pm\infty$.