Dr. Susanne Knies, Hannah Bergner 30.11.2015

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Webseite zur Vorlesung: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

WS 2015/16 — Blatt 7

Abgabe: bis Montag, den 7. Dezember 2015 um 14 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Der Umfang der Erde am Äquator sei als $U = 40.000$km angenommen.

- Zeichnen Sie den 48. Breitengrad der Nordhalbkugel auf einer Skizze ein, in der Sie die Erdkugel entlang eines Längenkreises aufschneiden und markieren Sie in der Skizze den Radius dieses Breitenkreises. Berechnen Sie seine Länge $U_{48°}$ auf der Erdoberfläche. Übrigens: Der 48. Breitengrad verläuft durch Freiburg und ist unweit des Institutsviertels an der Kreuzung Habsburgerstraße-Ludwigstraße markiert.

- Können Sie eine Formel herleiten, mit welcher Sie allgemein die Länge U_α des α - ten Breitenkreises aus dem Umfang der Erde berechnen können?

Aufgabe 2: **4 Punkte**

- Es gilt $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Berechnen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme $\cos 15°$ und $\sin 75°$.

- Sinushyperbolicus und Kosinushyperbolicus sind folgendermaßen definiert:

  $$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

  Zeigen Sie, dass für diese Funktionen gilt:

  a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

  b) $\cosh(x) = \cosh(-x)$ und $\sinh(-x) = -\sinh(x)$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

In der Netzhaut von Wirbeltieren befindet sich direkt unter den Photorezeptoren ein Netzwerk von sogenannten Horizontalzellen. Wird die Netzhaut mit einem Lichtspalt der Breite $2d$ an der Stelle $x = 0$ beleuchtet, ergibt ein einfaches Modell folgenden Verlauf der Membranspannung $V(x)$ der Horizontalzellen am Ort x rechtwinklig zum Spalt:

$$V(x) = \begin{cases} c_1 \exp(-\frac{|x|}{\lambda}) + E_0 & \text{für } |x| > d \\ c_2 \cosh(\frac{x}{\lambda}) + E_1 & \text{für } |x| \leq d \end{cases}$$

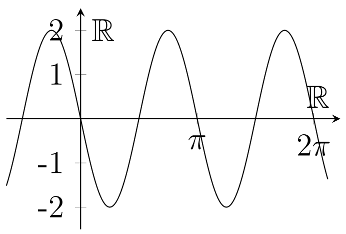
Hierbei ist E_0 das Ruhepotential der Zellen im Dunkeln, E_1 die Membranspannung bei vollständiger Beleuchtung der Netzhaut und $\lambda > 0$ eine Längenkonstante, die angibt, wie weit sich eine Änderung der Membranspannung im Horizontalzellennetzwerk ausbreitet. Ferner seien c_1 und c_2 Konstanten.

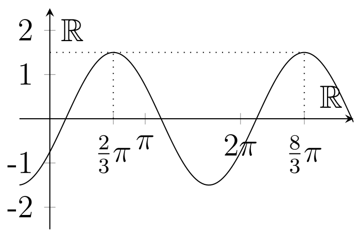
bitte wenden!

1. Welche Membranspannung herrscht in den Zellen, die weit von der Netzhaut entfernt sind, d.h. was gilt für $V(x)$ falls $|x| \to \infty$?
2. Welche Symmetrien hat die Membranspannung $V(x)$?
3. Es gelte $c_1 = (E_1 - E_0)\sinh(\frac{d}{\lambda})$ und $c_2 = (E_0 - E_1)e^{-\frac{d}{\lambda}}$. Zeigen Sie, dass $V(x)$ stetig ist. Hinweis: Sie können die Stetigkeit aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion und Satz 4.4 herleiten.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Finden Sie Funktionen f und g, deren Graphen wie folgt aussehen:





Erläutern Sie, wie die Parameter der Zuordnungsvorschriften das Verhalten der Graphen beeinflussen.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 7

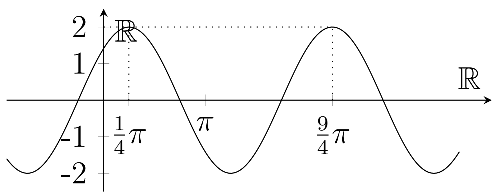
Aufgabe 1:

- Gegeben seien die periodischen Funktionen

$$f(t) = 3\sin(2\pi t), \qquad g(t) = 2\sin(t + \frac{\pi}{4}).$$

  Skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen und diskutieren Sie die Unterschiede zum Graphen von $\sin(t)$, indem Sie sich die Lage der Nullstellen überlegen und sich klar machen, welche Amplitude A und Periodendauer T die periodischen Funktionen haben.

- Finden Sie eine Funktion f, deren Graph wie folgt aussieht:



Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{für } x \leq 4 \\ cx + 9 & \text{für } x > 4, \end{cases}$$

wobei c eine Konstante sei. Finden Sie zwei verschiedene Werte für die Konstante c, sodass die Funktion f stetig bzw. nicht stetig ist und skizzieren Sie in beiden Fällen die Graphen.