Dr. Susanne Knies, Hannah Bergner 07.12.2015

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Webseite zur Vorlesung: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

WS 2015/16 — Blatt 8

Abgabe: bis Montag, den 14. Dezember 2015 um 14 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1

Aufgabe 1 (Herleitung der Formel $(x^n)' = nx^{n-1}$) **4 Punkte**

In dieser Aufgabe soll bewiesen werden, dass für die Funktion $f_n(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt:

$$f_n{}'(x) = nx^{n-1}$$

In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass $f_1{}'(x) = 1$ und $f_2{}'(x) = 2x$.

1. Zeigen Sie, dass im Beispiel $n = 3$ gilt $f_3{}'(x) = 3x^2$. Verwenden Sie hierfür die Produktregel und schreiben Sie f_3 als $f_3(x) = x^3 = f_1(x)f_2(x)$.

2. Zeigen Sie, dass, falls die obige Formel für f_{n-1} gilt, so auch für f_n. D.h. nehmen Sie an, dass $f_{n-1}{}'(x) = (n-1)x^{n-2}$ gilt, und leiten Sie daraus her, dass $f_n{}'(x) = nx^{n-1}$, indem Sie wieder die Produktregel anwenden und $f_n(x) = f_1(x)f_{n-1}(x)$ benutzen.

   (Bemerkung: Iteration dieses Arguments zeigt, dass die Ableitung von f_n für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, durch obige Formel gegeben ist. Dieses Beweisprinzip wird auch vollständige Induktion genannt.)

Aufgabe 2: **4 Punkte + 2 Bonuspunkte**

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$. Es sei $f : (a, b) \to (c, d)$ eine invertierbare differenzierbare Funktion mit Umkehrfunktion $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$.

1. Beweisen Sie, dass unter der Voraussetzung, dass die Umkehrfunktion f^{-1} in $y \in (c, d)$ differenzierbar ist, gilt:

   $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

   (Tipp: $(f \circ f^{-1})(y) = y$ für alle $y \in (c, d)$ und Kettenregel)

2. Bestimmen Sie die Ableitung von $g(x) = \sqrt[n]{x}$, indem Sie Aufgabe 1 anwenden und benutzen, dass g die Umkehrfunktion von $f(x) = x^n$ ist.

3. **Bonusteil:** Finden Sie ein Beispiel für eine invertierbare differenzierbare Funktion f deren Umkehrfunktion f^{-1} nicht in jedem Punkt differenzierbar ist.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen und vereinfachen Sie falls möglich das Ergebnis.

a) $f(x) = x^3 \cos x$

b) $g(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+2}$

c) $h(x) = \ln(x^2+1)$

d) $u(x) = \dfrac{\ln x - \sin(2x)}{x}$

e) $v(x) = \big(3x-a\big)^2$ mit $a \in \mathbb{R}$

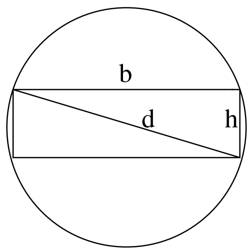
f) $w(x) = \cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

g) $k(x) = \sqrt{x^3+1}$

h) $l(x) = a^x$ mit $a > 0$

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt so herausgeschnitten werden, dass sein Widerstandsmoment $W = \frac{1}{6}bh^2$ den größtmöglichen Wert annimmt (d.h. der Balken soll so stabil wie möglich sein). Berechnen Sie b und h in Abhängigkeit von d so, dass W maximal wird.



b: Breite des Balkens, h: Höhe des Balkens, d: Durchmesser des Baumstamms
Tipp: Finden Sie anhand der Skizze einen Zusammenhang zwischen b, h und d und schreiben Sie W als Funktion abhängig von der Variablen b, wobei d als konstant vorausgesetzt wird.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 8

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $g(x) = \sqrt{x}$, indem Sie verwenden, dass g die Umkehrfunktion von $f(x) = x^2$ ist, deren Ableitung in der Vorlesung bestimmt wurde.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Tangentengleichung an den Graphen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, durch den Punkt $(4, f(4))$ und skizzieren Sie den Graphen von f und die ermittelte Tangente.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen:

- $f(x) = e^{\cos(x)}$
- $g(x) = \dfrac{x}{x^5-1}$
- $h(x) = 2^x$, Tipp: $2^x = e^{x\ln(2)}$