Dr. Susanne Knies, Hannah Bergner 14.12.2015

Mathematatik I für Naturwissenschaftler

Webseite zur Vorlesung: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

WS 2015/16 — Blatt 9

Abgabe: bis Montag, den 21. Dezember 2015 um 14 Uhr

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hopital. Zunächst sollten Sie hierzu überprüfen, dass die Voraussetzungen erfüllt sind.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+5x}{1-e^{2x}}$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$
- $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-3^x}{3^x-x^3}$ (Tipp: Schreiben Sie 3^x als $e^{x\ln 3}$.)

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Funktionen, deren Graph einen S-formigen Verklauf haben, werden als Sigmoid-Funktionen bezeichnet. Sie sind streng monoton und haben genau einen Wendepunkt. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass $f(t) := \frac{e^t}{1+e^t}$ eine solche Funktion ist.

a) Zeigen Sie, dass f streng monoton ist.

b) Rechnen Sie nach, dass $f''(t) = \frac{(1-e^t)e^t}{(1+e^t)^3}$ gilt und bestimmen Sie die Wendepunkte von f.

c) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ und $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)$ und skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Die Molwärme eines zweiatomigen Gases ist bei festem Volumen als Funktion der absoluten Temperatur T gegeben durch

$$c(T) = R\frac{\left(T_0/T\right)^2 e^{\frac{T_0}{T}}}{\left(e^{\frac{T_0}{T}}-1\right)^2}.$$

Hierbei ist R die ideale Gaskonstante und T_0 die charakteristische Temperatur. Berechnen Sie $\lim\limits_{T\to 0} c(T)$ und $\lim\limits_{T\to\infty} c(T)$.

Anleitung: Zur Vereinfachung setzt man $x := \frac{T_0}{T}$. Damit kann man $c(T)$ umschreiben:

$$c(T) = R\frac{\left(T_0/T\right)^2 e^{\frac{T_0}{T}}}{\left(e^{\frac{T_0}{T}}-1\right)^2} = R\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2}.$$

Für $T\to 0$ gilt $x\to\infty$ und für $T\to\infty$ gilt $x\to 0$, d.h. es gilt

$$\lim_{T\to 0} c(T) = \lim_{x\to\infty} R\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2} \quad \text{und} \quad \lim_{T\to\infty} c(T) = \lim_{x\to 0} R\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2}.$$

Aufgabe 4 (Intervallschachtelung): **4 Punkte**

Gesucht ist eine approximative Lösung $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $e^x - 1 = \cos(x)$. Betrachten Sie dazu die Funktion $f(x) := e^x - 1 - \cos(x)$.

a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f_1(x) = e^x - 1$ und $f_2(x) = \cos(x)$ in einem Diagramm und verdeutlichen Sie anschaulich, dass die Gleichung $e^x - 1 = \cos(x)$ eine Lösung im Intervall $I_1 := [0, \frac{\pi}{2}]$ hat.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f mindestens eine Nullstelle im Intervall $I_1 := [0, \frac{\pi}{2}]$ hat. (Tipp: Betrachten Sie $f(0)$ und $f(\frac{\pi}{2})$.)

c) Wir möchten schrittweise die Lage der Nullstelle weiter eingrenzen, indem wir die Intervalle halbieren und jeweils die Hälfte des Intervalles auswählen, in dem sich die Nullstelle befindet. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Berechnen Sie $f(\frac{\pi}{4})$ und entscheiden Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, ob die Nullstelle in $[0, \frac{\pi}{4}]$ oder in $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ liegt. (Hier ist ein Taschenrechner erlaubt!)

(ii) Definieren Sie als neues Intervall I_2 das Intervall, für das Sie sich in (i) entschieden haben.

(iii) Halbieren Sie nun I_2 und wiederholen Sie entsprechend die Schritte (i)-(ii), um I_3 und anschließend I_4 zu berechnen.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 9

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin(x) + 2x}{\cos(x) + 2x}$

Aufgabe 2:

Betrachten Sie die Funktion $f(x) := (x - 3)^2$.

- Bestimmen Sie Minima, Maxima und Wendepunkte der Funktion f.
- Zerlegen Sie $\mathbb{R}$ in Intervalle, auf denen f monoton ist.
- Zerlegen Sie $\mathbb{R}$ in Intervalle, auf denen f rechts- oder linksgekrümmt ist.