Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2015/16 — Lösungshinweise zu Blatt 10

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Es seien $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = e^x$.

1. Berechnen Sie die Taylorpolynome $P^4_{f,0}$ und $P^4_{g,0}$ vierter Ordnung zu f und g im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

2. Finden Sie Formeln für $P^n_{f,0}$ und $P^n_{g,0}$.

Lösung:

1. Das Taylorpolynom der Ordnung 4 im Punkt x_0 einer Funktion u berechnet sich durch

$$P^n_{u,x_0}(x) = u(x_0) + \frac{u'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{u^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4.$$

Wir setzen in die Formel ein und erhalten

$$\begin{aligned} P^4_{f,0}(x) &= \cos(0) + \frac{-\sin(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{-\cos(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{\sin(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{\cos(0)}{4!}(x-0)^4 \\ &= 1 - 0 - \frac{1}{2!}x^2 + 0 + \frac{1}{4!}x^4 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4. \end{aligned}$$

und

$$P^4_{g,0}(x) = e^0 + \frac{e^0}{1!}(x-0) + \frac{e^0}{2!}(x-0)^2 + \frac{e^0}{3!}(x-0)^3 + \frac{e^0}{4!}(x-0)^4 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

2. Iterativ lässt sich zeigen, dass wir für die Ableitungen von $f(x) = \cos(x)$ folgendes gilt: $f^{(4k)}(x) = \cos(x)$, $f^{(4k+1)}(x) = -\sin(x)$, $f^{(4k+2)}(x) = -\cos(x)$ und $f^{(4k+3)}(x) = \sin(x)$ für beliebige $k \in \mathbb{N}$.

Deshalb gilt $f^{(4k)}(0) = 1$, $f^{(4k+1)}(0) = 0$, $f^{(4k+2)}(0) = -1$ und $f^{(4k+3)}(0) = 0$ und es folgt, dass

$$P^n_{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

für gerade Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und

$$P^n_{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$$

für ungerade Zahlen $n \in \mathbb{N}$.

Für $g(x) = e^x$ gilt $g^{(k)}(x) = e^x$ und somit $g^{(k)}(0) = 1$ für alle n. Daher ist

$$P^n_{g,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. (Tipp: Verwenden Sie $|\sin'(z)| = |\cos(z)| \leq 1$)

2. Beweisen Sie, dass die Gleichung $\ln(x) + 2 = x$ eine Lösung hat. (Tipp: Zwischenwertsatz)

Lösung:

1. Falls $x = y$, so gilt $\sin(x) - \sin(y) = 0$ und ebenso $x - y = 0$, womit die Gleichung gezeigt ist. Wir betrachten jetzt den Fall $x < y$ (der Fall $y < x$ lässt sich genauso zeigen). Die Funktion $\sin(x)$ ist auf dem abgeschlossenen Intervall $[x, y]$ definiert. Aus dem Mittelwertsatz folgt, dass es ein $z \in [x, y]$ gibt mit
$$\frac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x} = \sin'(z) = \cos(z).$$
Insbesondere gilt somit
$$\left| \frac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x} \right| = |\cos(z)| \leq 1$$
und es folgt
$$|\sin(y) - \sin(x)| \leq |y - x|.$$

2. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \ln(x) + 2 - x$ und stellen fest, dass x_0 genau dann eine Nullstelle von f ist, wenn x_0 eine Lösung der Gleichung $\ln(x) + 2 = x$ ist. Es muss also gezeigt werden, dass f eine Nullstelle hat.

   Es gilt (z.B.)
$$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) + 2 - \frac{1}{e^2} = \ln(e^{-2}) + 2 - \frac{1}{e^2} = -2 + 2 - \frac{1}{e^2} = -\frac{1}{e^2} < 0$$
und
$$f(1) = \ln(1) + 2 - 1 = 0 + 1 = 1 > 0.$$
Da die Funktion f stetig ist, muss es laut dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle $x_0 \in [\frac{1}{e^2}, 1]$ von f geben.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Bestimmen Sie Minima, Maxima und Wendepunkte der Funktionen
$$f(x) = e^{2x} - 2e^{x+1} + 1 \quad \text{und} \quad g(x) = (\sin(x))^3.$$
(Tipp: Zeigen Sie u.a. $g''(x) = 3\sin(x)(3(\cos(x))^2 - 1)$.)

Lösung:

- Es gilt
$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{x+1} = 2e^x(e^x - e) \quad \text{und} \quad f''(x) = 4e^{2x} - 2e^{x+1} = 2e^x(2e^x - e).$$
Falls x_0 ein Minimum oder Maximum von f ist, so gilt $0 = f'(x_0) = 2e^{x_0}(e^{x_0} - e)$. Da $e^{x_0} \neq 0$ für beliebige x_0, ist dies genau dann der Fall, wenn $e^{x_0} = e$, d.h. $x_0 = 1$. Dies ist ein Minimum von f, da $f''(1) = 2e^1(2e^1 - e) = 2e^2 > 0$.

  Für Wendepunkte y_0 von f muss $0 = f''(y_0) = 2e^{y_0}(2e^{y_0} - e)$ gelten. Da $e^{y_0} \neq 0$ für beliebige y_0, gilt $f''(y_0) = 0$ genau dann, wenn $e^{y_0} = \frac{e}{2}$ bzw. $y_0 = \ln\left(\frac{e}{2}\right) = 1 - \ln(2)$. Um zu überprüfen, dass $y_0 = \ln\left(\frac{e}{2}\right)$ wirklich ein Wendepunkt von f ist, reicht es $f'''(\ln\left(\frac{e}{2}\right)) \neq 0$ zu zeigen. Es gilt
$$f'''(x) = 8e^{2x} - 2e^{x+1} = 2e^x(4e^x - e).$$
Daher ist
$$f'''\left(\ln\left(\frac{e}{2}\right)\right) = 2e^{\ln\left(\frac{e}{2}\right)}(4e^{\ln\left(\frac{e}{2}\right)} - e) = 2\left(\frac{e}{2}\right)\left(4\left(\frac{e}{2}\right) - e\right) = e^2 \neq 0$$
und $y_0 = \ln\left(\frac{e}{2}\right) = 1 - \ln(2)$ ist tatsächlich ein Wendepunkt von f.

- Wir berechnen zunächst die Ableitungen
$$g'(x) = 3(\sin(x))^2\cos(x)$$

und

$$\begin{aligned} g''(x) &= 6\sin(x)(\cos(x))^2 - 3(\sin(x))^3 = 3\sin(x)\left(2(\cos(x))^2 - (\sin(x))^2\right) \\ &= 3\sin(x)\left(3(\cos(x))^2 - 1\right), \end{aligned}$$

wobei die Produktregel und die Gleichung $(\sin(x))^2 = 1 - (\cos(x))^2$ benutzt wurden.

Bestimmung der Extremwerte von g: Die Nullstellen von g' sind gerade die Punkte $x_0 \in \mathbb{R}$ für die $\sin(x_0) = 0$ oder $\cos(x_0) = 0$. Wir haben

$$\sin(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \pi k \;\text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

und

$$\cos(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k \;\text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Die Punkte der Form $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sind alle Maxima von g, da

$$\begin{aligned} g''\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) &= 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\left(3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)^2 - 1\right) \\ &= 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 - 1\right) = 3(0-1) = -3 < 0. \end{aligned}$$

Des Weiteren sind die Punkte der Form $x_0 = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, alle Minima von g, da

$$\begin{aligned} g''\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) &= 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)\left(3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)^2 - 1\right) \\ &= 3\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\left(3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)^2 - 1\right) = 3\cdot(-1)(0-1) = 3 > 0. \end{aligned}$$

Ein Punkt der Form $x_0 = \pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist weder ein Minimum noch ein Maximum von g, da g' keinen Vorzeichenwechsel bei $x_0 = \pi k$ hat:
Falls $k = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, eine gerade ganze Zahl ist, so gilt $\cos(\pi k) = \cos(2l\pi) = \cos(0) = 1$ und wegen Stetigkeit von g' dann $g'(x) = 3(\sin(x))^2\cos(x) \geq 0$ für x nahe bei $x_0 = 2l\pi$. Falls $k = 2l+1$, $l \in \mathbb{Z}$, eine ungerade ganze Zahl ist, so gilt $\cos(\pi k) = \cos((2l+1)\pi) = \cos(\pi) = -1$ und wegen Stetigkeit von g' folgt hier $g'(x) = 3(\sin(x))^2\cos(x) \leq 0$ für x nahe bei $x_0 = (2l+1)\pi$.

Bestimmung der Wendepunkte von g: Mögliche Wendepunkte von g sind die Punkte x_0 mit $g''(x_0) = 3\sin(x_0)\left(3(\cos(x_0))^2 - 1\right) = 0$. Falls $g''(x_0) = 0$ gilt, dann ist entweder

$$\sin(x_0) = 0 \quad \text{oder} \quad 3\cos(x_0)^2 - 1 = 0.$$

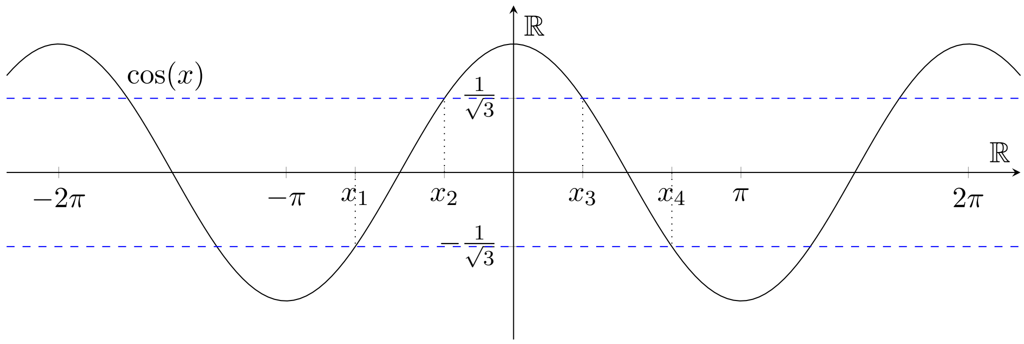
Im Fall $\sin(x_0) = 0$ gilt

$$x_0 = \pi k \quad \text{für ein} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Da die Funktion $\sin(x)$ einen Vorzeichenwechsel bei $x_0 = \pi k$ hat und $3\cos(\pi k)^2 - 1 = 3(\pm 1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2 \neq 0$, hat g'' einen Vorzeichenwechsel bei $x_0 = \pi k$ und

$$x_0 = \pi k \quad \text{ist für jedes} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ein Wendepunkt von } g.$$

Im anderen Fall ist $3\cos(x)^2 - 1 = 0$ und diese Gleichung hat die vier Lösungen x_1, x_2, x_3 und x_4 im Intervall $[-\pi, \pi]$.



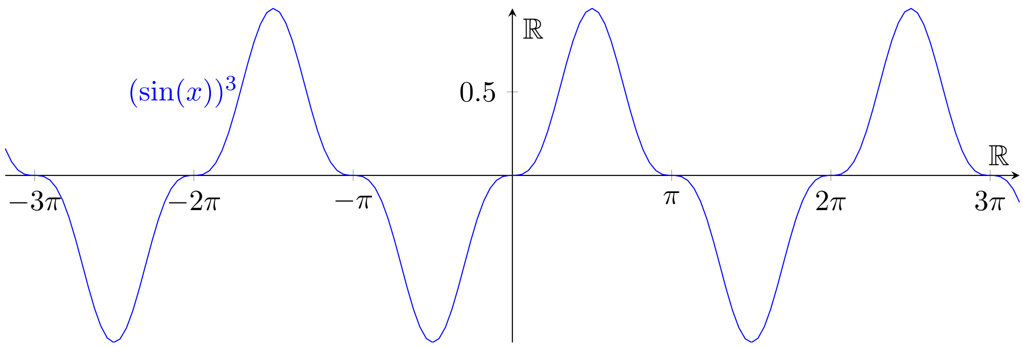
Es gilt $x_3 = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ und $x_4 = \arccos\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ und wir haben $x_1 = -x_4$ und $x_2 = -x_3$ wegen der Achsensymmetrie von $\cos(x)$. Ferner gilt $x_3 = x_1 + \pi$ und $x_4 = x_2 + \pi$.

Da $\cos(x)$ eine 2π-periodische Funktion ist, sind die Nullstellen von $3\cos(x)^2 - 1$ also genau die Punkte der Form

$$x_0 = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \pi k \quad \text{bzw.} \quad x_0 = \arccos\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \pi k \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Die Funktion $3\cos(x)^2 - 1$ hat am Punkt $x_0 = \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \pi k$ einen Vorzeichenwechsel, da $\cos(x)$ und folglich $\cos(x)^2$ und $3\cos(x)^2 - 1$ streng monoton steigend oder fallend sind in der Umgebung von jedem Punkt z, der nicht Nullstelle oder Extremwert von $\cos(x)$ ist, also ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, d.h. $z \neq \frac{\pi}{2}l$, $l \in \mathbb{Z}$. Da $\sin\left(\arccos\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \pi k\right) \neq 0$ hat g'' somit einen Vorzeichenwechsel bei $x_0 = \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \pi k$ und dies ist ein Wendepunkt von g. Insgesamt sind also die folgenden Punkte Wendepunkte von g:

$$\pi k \ (\text{für } k \in \mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \pi l \ (\text{für } l \in \mathbb{Z})$$



Aufgabe 4: **4 Punkte**

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \frac{x-5}{x^3+2x^2} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-2}.$$

1. Bestimmen Sie die Definitionsbereiche, Nullstellen und Polstellen von f und g. Bei welchen Polstellen liegen Vorzeichenwechsel vor?

2. Geben Sie das asymptotische Verhalten von f und g für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an. Um das Verhalten von g zu bestimmen, zeigen Sie zuerst, dass $g(x) = x + \frac{1}{x-2}$.
Skizzieren Sie dann (ohne GTR) Schaubilder der Graphen von f und g.

Lösung:

1. Die Funktionen f und g sind definiert, falls der Nenner nicht verschwindet. Da $x^3 + 2x^2 = x^2(x+2) = 0$ genau dann wenn $x = 0$ oder $x = -2$, ist der Definitionsbereich von f gerade $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$. Der Punkt -2 ist eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel von f, da der Nenner von f eine Nullstelle 1.Ordnung bei -2 hat und der Zähler von f keine Nullstelle. Ferner ist 0 eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel von f, da der Nenner eine Polstelle 2.Ordnung bei 0 hat und 0 keine Nullstelle des Zählers ist. Die Nullstellen von f sind hier die Nullstellen des Zählers, also $x = 5$.

   Der Definitionsbereich von g ist $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Die Funktion g eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x = 2$, da 2 eine Nullstelle 1.Ordnung des Nenners ist und keine Nullstelle des Zählers. Die Nullstellen von g sind die Nullstellen von $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, also $x = 1$.

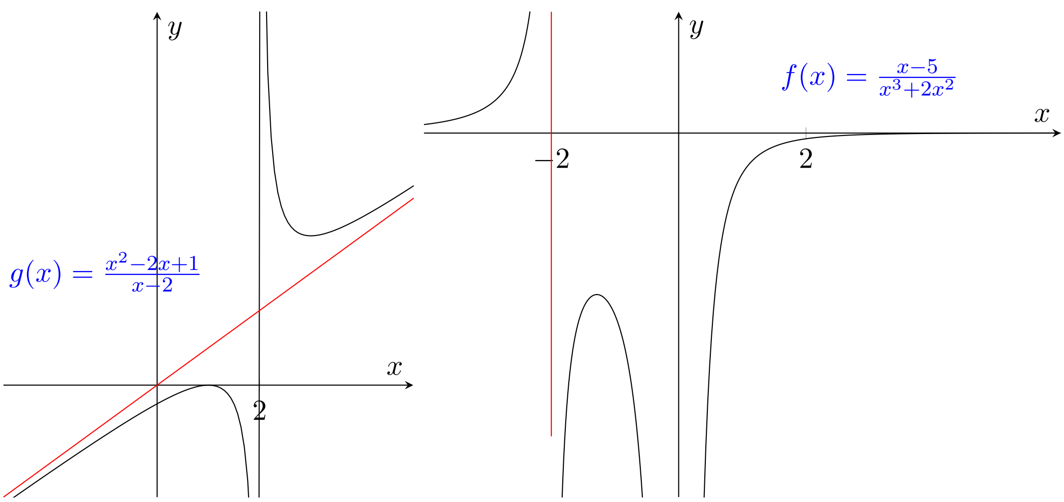
2. Da der Grad des Zählerpolynoms von f genau 1 ist und der Grad des Nennerpolynoms 3 und somit insbesondere größer als 1 ist, gilt

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

   Es gilt

   $$x + \frac{1}{x-2} = \frac{x(x-2)+1}{x-2} = \frac{x^2-2x+1}{x-2} = g(x).$$

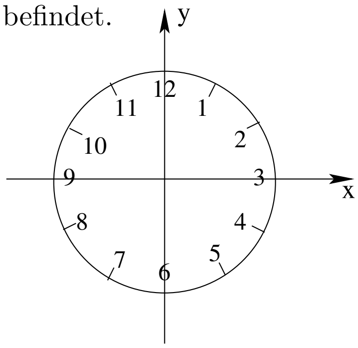
   Die Funktion g verhält sich also für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ wie die Funktion x (die Gerade durch den Ursprung mit Steigung 1).



Die Nullstelle von f in $x = 5$ lässt sich in der Skizze auf Grund der sehr kleinen Funktionswerte leider nicht gut darstellen. Die Funktion f hat für ein $x_m > 5$ ein lokales Maximum und nähert sich danach wieder der x-Achse an.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Auf der Skizze ist das Ziffernblatt einer Uhr mit Radius 1 in ein Koordinatensystem eingezeichnet - und zwar so, dass sich der Mittelpunkt der Uhr am Ursprung (0/0) befindet.
Die Markierung für 12 Uhr befindet sich also am Punkt (0/1), die für 3 Uhr an (1/0), 6 Uhr an $(0/-1)$ und 9 Uhr an $(-1/0)$. Berechnen Sie ohne Taschenrechner die Koordinaten der restlichen Stundenmarkierungen. Verwenden Sie dabei ausschließlich $\sin 30° = \frac{1}{2}$ und den Satz des Pythagoras.



Bemerkung: Auch $\sin 30° = \frac{1}{2}$ lässt sich ohne Taschenrechner aus dem Satz des Pythagoras berechnen.

Lösung:

Es sei mit z_k die Position der Ziffer k bezeichnet. Dann erhält man für die Ziffern auf den Koordinatenachsen

$$z_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_9 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aus $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ und $\sin 30° = \frac{1}{2}$ folgt $\cos 30° = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, weshalb

$$z_2 = \begin{pmatrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Durch Spiegelung an den Achsen erhält man dann

$$z_{10} = \begin{pmatrix} -\cos 30° \\ \sin 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad z_8 = \begin{pmatrix} -\cos 30° \\ -\sin 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad z_4 = \begin{pmatrix} \cos 30° \\ -\sin 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden erhält man aus der Darstellung für z_2, dass

$$z_1 = \begin{pmatrix} \sin 30° \\ \cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Dann folgt wiederum durch spiegeln an den Achsen, dass

$$z_{11} = \begin{pmatrix} -\sin 30° \\ \cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad z_7 = \begin{pmatrix} -\sin 30° \\ -\cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad z_5 = \begin{pmatrix} \sin 30° \\ -\cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: **4 Punkte**

1. Eine Basketballmannschaft besteht aus 9 Spielerinnen. Wie viele Möglichkeiten hat die Trainerin, 5 Startspielerinnen auszuwählen?

2. Zur Sylvesterparty haben Sie für Ihre Gäste drei verschiedene Sorten Bier gekauft, von jeder Sorte 20 Flaschen. Das Bier soll im Kühlschrank kalt gestellt werden. Dort ist jedoch nur Platz für 12 Flaschen. Wie viele Möglichkeiten gibt es 12 Flaschen auszuwählen? (Tipp: Inwiefern ist es relevant, dass Sie 20 Flaschen von jeder Sorte haben?)

Lösung: **4 Punkte**

1. Das Problem entspricht der Aufgabe 5 - elementige Teilmengen einer 9 - elementigen Menge zu bilden (im Skript: 1.2.3 Kombinationen ohne Wiederholungen). Es gibt daher

$$\binom{n}{k} = \binom{9}{5} = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 126$$

   Möglichkeiten.

2. Es gibt von jeder Biersorte 20 Flaschen, also mehr als Platz im Kühlschrank ist. Für die weiteren Überlegungen ist die genaue Anzahl an Flaschen je Sorte daher nicht relevant. Für jeden der 12 Plätze im Kühlschrank wird eine der 3 Sorten Bier gewählt. Das Problem entspricht daher dem Bücherregalmodell aus dem Skript mit $n = 3$ und $k = 12$, so dass man

$$\binom{n-1+k}{k} = \binom{3-1+12}{12} = \binom{14}{12} = \frac{14 \cdot 13}{1 \cdot 2} = 91$$

Möglichkeiten hat, den Kühlschrank zu füllen (im Skript: 1.2.3 Kombinationen mit Wiederholungen).

Aufgabe 7: **4 Punkte**

Gegeben seien die Folgen

$$a_n = \left(3 + \frac{2}{n^2}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) \quad \text{und} \quad b_n = a_n + \frac{17n+1}{34n}$$

1. Untersuchen Sie die Folgen a_n und b_n auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert, falls dieser existiert.

2. Schreiben Sie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2048}$ mit Summenzeichen, d.h. in der Form $\sum_{k=0}^{n} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, und berechnen Sie die Summe.

Lösung:

1. Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Mit dem 2. Konvergenzsatz aus der Vorlesung folgt, dass $\left(3 + \frac{2}{n^2}\right)$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{2}{n^2}\right) = 3 + 0 = 3$. Ebenso konvergiert $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1$. Erneute Anwendung des 2. Konvergenzsatzes liefert, dass die Folge a_n konvergiert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{2}{n^2}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = 3 \cdot 1 = 3.$$

Anwendung des 2. Konvergenzsatzes zeigt ferner, dass $\frac{17n+1}{34n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{34n}$ und b_n konvergieren und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{34n}\right) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

2. Es gilt

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2048} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Da $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$ (geometrische Reihe), gilt

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2048} = \sum_{k=0}^{11} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right)$$

$$= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 2 - \frac{1}{2048} = \frac{4096 - 1}{2048} = \frac{4095}{2048}.$$

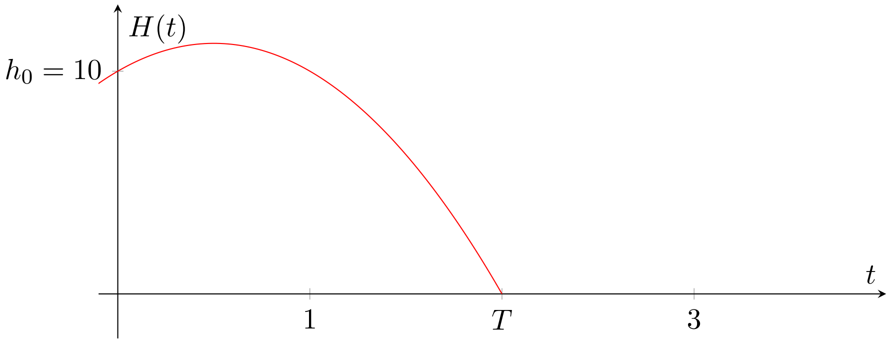
Aufgabe 8: (Bei dieser Aufgabe ist ein Taschenrechner erlaubt.) **4 Punkte**

Ein Turmspringer springt von einem 10m Turm in ein Sprungbecken und dabei zunächst mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach oben. Unter Vernachlässigung des Luftwiderstands kann man die Höhe des Springers in Abhängigkeit von der Zeit t mit der Formel $H(t) = v_0 t - \frac{g}{2}t^2 + 10m$ berechnen. Hierbei bezeichnet $g := 10\frac{m}{s^2}$ (stark gerundet) die Gravitationskonstante.

1. Skizzieren Sie $H(t)$ und geben Sie in Abhängigkeit von v_0 die Zeit T an, zu welcher der Springer auf der Wasseroberfläche aufkommt.
2. Wann passiert der Springer bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 5\frac{m}{s}$ die Sprungbretter in Höhe von 7, 5 und 3 Metern?
3. Bringen Sie H in Scheitelpunktsform. Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_0 muss der Springer hoch springen, um eine maximale Höhe von $11,5$ m zu erreichen?

Lösung:

1. Es ist



Man berechnet T durch

$$\begin{aligned} H(t) = v_0 t - \frac{g}{2}t^2 + 10m &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad t^2 - \frac{v_0}{5} t \frac{s^2}{m} - 2s^2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad t_{1/2} &= \frac{v_0}{10}\frac{s^2}{m} \pm \left(\sqrt{\frac{v_0^2}{100}\frac{s^2}{m^2} + 2}\right) s. \end{aligned}$$

Da wir nur an Lösungen $T > 0$ interessiert sind, folgt $T = \frac{v_0}{10}\frac{s^2}{m} + \left(\sqrt{\frac{v_0^2}{100}\frac{s^2}{m^2} + 2}\right) s$.

2. Man berechnet die Zeiten T_k mit $v_0 = 5\frac{m}{s}$ aus $H(t) = 5t - \frac{g}{2}t^2 + 10m = k\,m$, mit $k = 7, 5, 3$. Also ist

$$\begin{aligned} 5\frac{m}{s} \cdot t - \frac{g}{2}t^2 + 10m &= k\,m \\ \Leftrightarrow \quad t^2 - t\,s - \frac{10-k}{5}\,s^2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad t_{1/2} &= \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{10-k}{5}}\right) s. \end{aligned}$$

Wiederum interessieren uns nur Lösungen $T_k > 0$, sodass

$$T_7 = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{5}}\right) s \approx 1,42s, \quad T_5 = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1}\right) s \approx 1,62s,$$
$$T_3 = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{7}{5}}\right) s \approx 1,78s.$$

3. Es ist $H(t)$ in Scheitelpunktform (siehe S. 34 im Skript, hier: $a = -5\frac{m}{s^2}, \quad b = v_0, \quad c = 10m$)

$$H(t) = -5\frac{m}{s^2}\,(t + \frac{v_0}{2(-5)\frac{m}{s^2}})^2 - \frac{v_0^2}{4(-5)\frac{m}{s^2}} + 10m = -5\,(t\frac{1}{s} - \frac{v_0}{10}\frac{s}{m})^2 m + \frac{v_0^2}{20}\frac{s^2}{m} + 10m.$$

Man sieht, dass der maximale Wert $H_{\max}$ angenommen wird für $t = \frac{v_0}{10}\frac{s^2}{m}$ und es ist

$$H_{\max} = \frac{v_0^2}{20}\frac{s^2}{m} + 10m \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \left(\sqrt{\left(\frac{H_{\max}}{m} - 10\right) 20}\right) \frac{m}{s} = \left(\sqrt{(11,5 - 10)\,20}\right) \frac{m}{s} \approx 5,48\frac{m}{s}.$$

Der Turmspringer muss also mit $v_0 = 5,48\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ abspringen, um die Höhe von $11,5$m zu erreichen.

Aufgabe 9: (Bei dieser Aufgabe ist ein Taschenrechner erlaubt.) **4 Punkte**

Frosch Hugo ist ein alter Hase unter den Fröschen und außerdem frisch verliebt. Leider trennt ihn eine 10 Meter breite, dafür aber völlig unbefahrene Straße von seiner neuen Angebeteten. Hugo ist sich sicher, dass sich seine Sprungkraft mit jedem Sprung um 10% verringert. Von früheren Dates weiß er zwar, dass sein dritter Sprung 1,62 Meter weit sein wird, er weiß aber auch, dass er in seinem Alter nur noch maximal sieben Sprünge vollführen kann. Hat diese Liebe eine Chance? Begründen Sie Ihre Antwort. Tipp: Kann Hugo die Weite seines ersten Sprungs berechnen?

Lösung: Es bezeichne q_n die Weite des n-ten Sprunges von Hugo. Wir wissen, dass $q_3 = 1,62m$ und es gilt $q_n = \frac{9}{10}q_{n-1}$. Somit ist die Weite des ersten Sprunges

$$q_1 = \frac{10}{9} \cdot q_2 = \left(\frac{10}{9}\right)^2 \cdot q_3 = \frac{100}{81} \cdot 1,62m = 2m.$$

Die Weite des n-ten Sprunges ist

$$q_n = \frac{9}{10}q_{n-1} = \ldots = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \cdot q_1 = \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \cdot 2m.$$

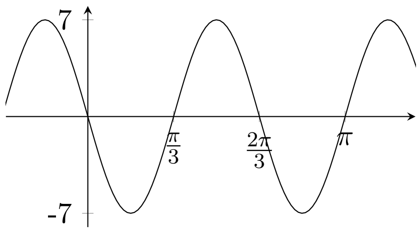
Hugo kann maximal sieben Sprünge machen und die maximale Weite, die er so ingesamt schaffen kann, ist daher

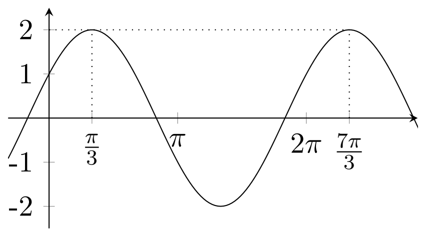
$$q_1 + \ldots + q_7 = 2m + \left(\frac{9}{10}\right) \cdot 2m + \ldots + \left(\frac{9}{10}\right)^6 \cdot 2m = 2m \cdot \sum_{k=0}^{6} \left(\frac{9}{10}\right)^k = 2m\frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^7}{1 - \left(\frac{9}{10}\right)}$$
$$= 2m \cdot 10\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^7\right) \approx 10,43 > 10.$$

Er schafft es also die Straße zu überqueren und seine Liebe hat damit eine Chance.

Aufgabe 10: **4 Punkte**

Finden Sie Funktionen f und g, deren Graphen wie folgt aussehen:





Erläutern Sie, wie die Parameter der Funktionsvorschriften das Verhalten der Graphen beeinflussen.

Lösung: Da die Graphen von f und g die Graphen periodischer Wellenfunktionen sind, wählen wir als Ansatz $f(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$ und $g(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$, wobei A_j, ω_j, φ_j reelle Konstanten sind.
Die Periodendauer von f ist $\frac{2\pi}{3}$, d.h. $f(t) = f(t + \frac{2\pi}{3})$ für belibiege $t \in \mathbb{R}$. Da die Sinus-Funktion 2π-periodisch ist und $f(t + \frac{2\pi}{3}) = \sin(\omega_1 t + \omega_1 \frac{2\pi}{3} + \varphi)$ muss $\omega_1 \frac{2\pi}{3} = \pm 2\pi$ gelten. Wir können somit

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$$

wählen. Die Periodendauer von g ist 2π und nach der gleichen Argumentation wie für f können wir

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

setzen.
Der Graph von f geht durch den Punkt $(0,0)$, es muss also $f(0) = A_1 \sin(3 \cdot 0 + \varphi_1) = A_1 \sin(\varphi_1) = 0$ gelten. Damit muss die Verschiebungskonstante φ_1 ein Vielfaches von π sein (da $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$), und wir können $\varphi_1 = 0$ wählen.
Aus dem Graphen von g lässt sich entnehmen, dass g ein Maximum bei $\frac{\pi}{3}$ hat. Die Verschiebungskonstante φ_2 muss also so gewählt werden, dass die Funktion $\sin(x)$ ein Maximum (oder Minimum) bei $\omega_2 \frac{\pi}{3} + \varphi_2 = \frac{\pi}{3} + \varphi_2$ hat. Die Funktion $\sin(x)$ nimmt ihre Maxima genau in den Punkten der Form $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$ an. Wir setzen nun $\frac{\pi}{3} + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ $(k = 0)$ und erhalten

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \pi \left(\frac{3-2}{6} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

Der Betrag der Amplitute A_1 gibt den maximalen Wert der Funktion f an, wir haben also $|A_1| = 7$. Mit den zuvor getroffenen Wahlen haben wir $f(t) = A_1 \sin(3t)$. Da laut Graph f um 0 herum (genauer: auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{3 \cdot 2}, \frac{\pi}{3 \cdot 2}\right] = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$) streng mononton fallend ist und f ein Minimum bei $\frac{\pi}{3 \cdot 2} = \frac{\pi}{6}$ hat, muss $A_1 = -7$ (und nicht $A_1 = 7$) gelten, insgesamt also

$$f(t) = -7 \sin(3t).$$

Für die Amplitute A_2 von g muss $|A_2| = 2$ gelten. Da g ein Maximum bei $\frac{\pi}{3}$ hat muss hier mit den zuvor getroffenen Wahlen $A_2 = 2$ gelten und wir haben insgesamt

$$g(t) = 2 \sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Bemerkung 1: Die Darstellungen von f und g wie oben angegeben sind nicht eindeutig, es gilt z.B. auch $f(t) = -7\sin(3t) = 7\sin(3t + \pi)$.

Bemerkung 2: Alternativ kann man f und g durch Kosinus-Funktionen beschreiben, also z.B. $g(t) = B\cos(\omega t + \psi)$, wobei man dann jedoch andere Konstanten erhält, z.B. gilt $g(t) = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$.