Dr. Susanne Knies, Hannah Bergner 08.02.2016

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2015/16— Lösung Blatt 15

Aufgabe 1:

Das Körpergewicht von Jugendlichen ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu =$ 60kg und Standardabweichung $\sigma = 5$kg. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Jugendlicher leichter als $57,5$kg oder schwerer als 60kg ist. Finden Sie außerdem eine Zahl x_0, so dass Gewicht von $98,8\%$ aller Jugendlichen um weniger als x_0 vom Erwartungswert abweicht.

Lösung:
Sei X die Zufallsvariable, die das Gewicht eines Jugendlichen angibt. Um die Tabelle für Φ verwenden zu können, brauchen wir außerdem eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Wir wissen aus der Vorlesung: Ist X eine Zufallsvariable, die normalverteilt ist mit Erwartungswert μ und Varianz σ, dann ist die Zufallsvariable $\tilde{X} := \frac{X-\mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt. Wir definieren also $\tilde{X} := \frac{X-60}{5}$ und können dann berechnen:

$$\begin{aligned} P(X \leq 57,5) &= P\Big(\frac{X-60}{5} \leq \frac{57,5-60}{5}\Big) \\ &= P\Big(\frac{X-60}{5} \leq -0,5\Big) \\ &= P(\tilde{X} \leq -0,5) \\ &= \Phi(-0,5) \\ &= 1-\Phi(0,5) \\ &\approx 1-0,691 \\ &= 0,309. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Jugendlicher schwerer als 60 kg ist, kann man so wie oben berechnen. Da aber 60 kg gerade dem Erwartungswert entspricht, kann man direkt aus den Eigenschaften der Normalverteilung schließen, dass

$$P(X \geq 60) = 1 - P(X \leq 60) = 0,5.$$

Wir müssen noch x_0 bestimmen, sodass $98,8\%$ der Jugendlichen ein Gewicht haben, das höchstens um x_0 vom Erwartungswert $\mu = 60$kg abweicht, d.h. wir wollen

$$P(60 - x_0 \leq X \leq 60 + x_0) = 0,988$$

haben. Es gilt

$$\begin{aligned} P(60-x_0 \leq X \leq 60+x_0) &= P\left(\frac{60-x_0-60}{5} \leq \frac{X-60}{5} \leq \frac{60+x_0-60}{5}\right) \\ &= P\left(\frac{-x_0}{5} \leq \tilde{X} \leq \frac{x_0}{5}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x_0}{5}\right) - \Phi\left(-\frac{x_0}{5}\right) = \Phi\left(\frac{x_0}{5}\right) - \left(1-\Phi\left(\frac{x_0}{5}\right)\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{x_0}{5}\right) - 1 \end{aligned}$$

Daher muss $\Phi\left(\frac{x_0}{5}\right) = \frac{0,988+1}{2} = 0,994$ gelten. Aus der Tabelle für die Werte von Φ kann man jetzt $\frac{x_0}{5} = 2,5$ entnehmen und wir erhalten $x_0 = 12,5$.

Aufgabe 2:

Die Körpergröße von Neugeborenen ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 51$ cm und Varianz $\sigma = 4$ cm. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Neugeborenes

- zwischen 54 cm und 56 cm groß?
- über 57 cm groß?

Lösung: siehe Beispiel 6.36 im Skript.

Aufgabe 3:

Ein Haushalt gilt als arm, wenn er über weniger als die Hälfte des Durchschnittseinkommens verfügt. Die Haushaltsnettoeinkommen sind normalverteilt mit $\mu =$ 2000 Euro und $\sigma = 1000$ Euro.

- Wie hoch ist der Anteil armer Haushalte?
- Über welches Nettoeinkommen verfügt ein Haushalt mindestens, damit er zu den reichsten 10% gehört?

Lösung:
Wir können auch hier annehmen, dass die Zufallsvariable X, welche das Hauhaltsnettoeinkommen beschreibt normalverteilt ist. Wie zuvor ist nun $\tilde{X} = \frac{X-2000}{1000}$ standardnormalverteilt.

- Ein Haushalt ist arm, falls das Haushaltsnettoeinkommen kleiner als 1000 Euro ist. Somit ist der Anteil der armen Haushalte:

  $$\begin{aligned} P(X \leq 1000) &= P\left(\frac{X-2000}{1000} \leq \frac{1000-2000}{1000}\right) \\ &= P\left(\tilde{X} \leq -1\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0,841 = 0,159 \end{aligned}$$

  Der Anteil der armen Haushalte ist also $15,9\%$.

- Es ist der Wert x_0 gesucht, für den $P(X \geq x_0) = 0,1$ gilt, was genau $P(X \leq x_0) = 1 - 0,1 = 0,9$ entsricht. Wir haben

  $$P(X \leq x_0) = P\left(\frac{X-2000}{1000} \leq \frac{x_0-2000}{1000}\right) = P\left(\tilde{X} \leq \frac{x_0}{1000} - 2\right) = \Phi\left(\frac{x_0}{1000} - 2\right).$$

  Aus der Tabelle mit den Werten von Φ entnehmen wir jetzt, dass $\frac{x_0}{1000} - 2 = 1,29$ gelten muss, woraus dann $x_0 = 1000(1,29 + 2) = 3290$ folgt.

Aufgabe 4:

Auf einem großen Hühnerhof werden täglich mehrere Tausend Eier gelegt, die stets einzeln gewogen werden. Es zeigt sich, dass ein Ei im Mittel 50 g wiegt, bei einer Standardabweichung von $\sigma = 5$ g. Für die Zufallsvariable

$$X = \text{"Gewicht von einem Ei"}$$

kann die Normalverteilung zugrunde gelegt werden.

a) Skizzieren Sie die Gauß'sche Glockenkurve der Zufallsvariablen X und markieren Sie dabei auch die gegebenen Parameter. Wieviele Prozent der Eier wiegen höchstens 50 g?

b) Wie viel Prozent der Eier wiegen höchstens $47,5$g?

Lösung:

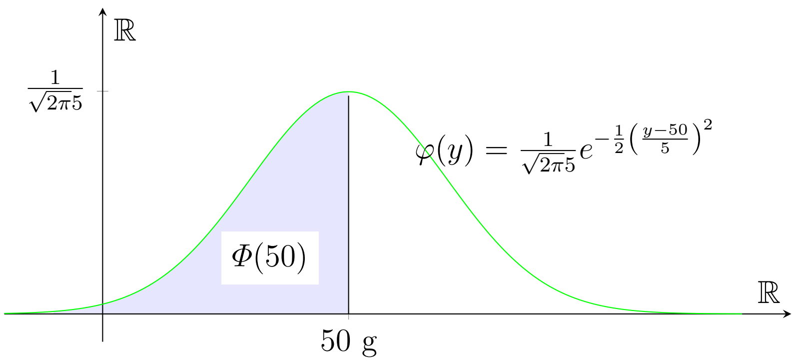

Figure 1: Die Dichtefunktion $\varphi(y)$ im Falle $\mu = 50$, $\sigma = 5$

a) Da $50g$ genau dem Erwartungswert der Zufallsvariable X entspricht, können wir aus den Eigenschaften der Normalverteilung schließen, dass $P(X \leq 50) = 0,5$.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} P(X \leq 47,5) &= P\left(\frac{X-50}{5} \leq \frac{47,5-50}{5}\right) \\ &= P\left(\frac{X-50}{5} \leq \frac{-2,5}{5}\right) = P\left(\frac{X-50}{5} \leq -\frac{1}{2}\right) \\ &= \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1 - 0,691 = 0,309 \end{aligned}$$

Entnehmen Sie die benötigten Werte der Tabelle für Φ:

x	0	0,2	0,5	0,75	0,9	1	1,29	1,5	1,96	2,5	3,0
$\Phi(x)$	0,5	0,579	0,691	0,77	0,82	0,841	0,90	0,933	0,975	0,994	0,999