Dr. Susanne Knies — Mathematik für Naturwissenschaftler — Sommer 2016
Blatt 2

Assistant:
Dr. Behrouz Taji (behrouz.taji@math.uni-freiburg.de) — Sprechstunde: Di. 13 - 16 Uhr.

1. (a) Welche der folgenden Vektoren stehen senkrecht aufeinander:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

   (b) Finden Sie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\mathbf{x}\| = 1$ und $\mathbf{x} \perp \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

   (c) Zeigen Sie: Wenn $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, dann $\mathbf{x} \perp (s \cdot \mathbf{y})$ für jedes $s \in \mathbb{R}$.
   (Tipp: Satz 7.9 im Skript.)

(4 Punkte)

2. Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ zwei Punkte auf einer Sphäre mit Radius R, deren Kugelkoordinaten $(R, \varphi_x, \vartheta_x)$ und $(R, \varphi_y, \vartheta_y)$ gegeben sind, das heisst:

$$\mathbf{x} = R\begin{pmatrix}\cos\varphi_x \sin\vartheta_x\\ \sin\varphi_x \sin\vartheta_x\\ \cos\vartheta_x\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = R\begin{pmatrix}\cos\varphi_y \sin\vartheta_y\\ \sin\varphi_y \sin\vartheta_y\\ \cos\vartheta_y\end{pmatrix}.$$

Es sind die geographischen Koordinaten von Freiburg ($48°$N, $7,8°$O) und von Suwon ($37,15°$N, $127°$O), der Erdradius sei $R = 6378$ km.

   (a) Geben Sie die Kugelkoordinaten $(R, \varphi_F, \vartheta_F)$, $(R, \varphi_S, \vartheta_S)$ der beiden Orte an und berechnen Sie das Skalarprodukt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{R}$ und den Winkel zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$. Runden Sie hierbei die Werte von sin/cos auf 4 Nachkommastellen.

   (b) Nun können Sie den Abstand von Freiburg und Suwon, gemessen auf der Erdoberfläche, bestimmen. Stellen Sie für die Verwendung der Winkelfunktionen Ihren Taschenrechner richtig ein.

(4 Punkte)

Bemerkung: Suwon in Südkorea ist seit letztem Jahr Partnerstadt von Freiburg. Eine Markierung des 48. Breitengrades ist in Freiburg an der Habsburgerstr. unweit des Institutsviertels auf dem Gehweg angebracht.

3. (a) Sei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$. Skizzieren Sie $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ und $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ und zeigen Sie $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$.

(b) Seien nun $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ zwei beliebige Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Rechnen Sie nach, dass die Parallelogrammgleichung gilt, das heißt:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2.$$

(4 Punkte)

4. (a) Zeigen Sie: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\| \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2$ ist kein linearer Unterraum.

   (b) Zeigen Sie: $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{y} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2$ ist ein linearer Unterraum.

   (c) Seien $\mathbf{x} = (2,1)$ und $\mathbf{y} = (3,-2)$ Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ linear unabhängig sind.

(4 Punkte)

Abgabe: Montag <u>02.05.2016</u> bis 12:00

Mehr aufgaben:

1. Seien $\mathbf{x} = (1,1)$ und $\mathbf{y} = (1,-2)$ Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ linear unabhängig sind.

2. (a) Skizziersen Sie 4 Beispiele von Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, die keine linearer Unterraum sind.

   (b) Zeigen Sie $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ ist kein linearer Unterraum.

   (c) Sei $S := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}\}$.

   Zeigen Sie: $S = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, r, q \in \mathbb{R}\}$.

   (d) Zeigen Sie: $L := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 3x_2 = 0\}$ ist ein linearer Unterraum..