Dr. Susanne Knies — Mathematik für Naturwissenschaftler — Sommer 2016
Blatt 3

Assistant:
Dr. Behrouz Taji (behrouz.taji@math.uni-freiburg.de) — Sprechstunde: Di. 13 - 16 Uhr.

1. (a) Sei $\mathbb{L}_0$ die Lösungsmenge der Gleichung

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Geben Sie Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ an, so dass $\mathbb{L}_0 := \{s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 \mid s, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ und Zeigen Sie, dass die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ linear unabhängig sind. (Beachten Sie, dass die Vektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ nicht eindeutig sind.)

(b) Berechnen Sie die Lösungsmenge zu

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ 3x_2 + 2x_2 &= 2. \end{aligned}$$

(4 Punkte)

2. Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 17x_4 + 9x_5 &= 5 \\ x_2 + 4x_3 + x_5 &= 6 \\ 3x_5 &= 6 \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von (1) in parametrisierter Form an. Entscheiden Sie, ob $\mathbb{L}$ einen linearen oder einen affin linearen Unterraum des $\mathbb{R}^5$ bildet und geben Sie dessen Dimension an.

(b) Können Sie ohne erneutes Rechnen die Lösungen des zu (1) gehörigen homogenen Systems angeben? Prüfen Sie Ihre Behauptung anhand zweier Zahlenbeispiele nach.

(4 Punkte)

3. Es sei bekannt, dass Harnstoff $(NH)_2CO$ mit salpetriger Säure HNO_2 zu Kohlendioxid CO_2, Stickstoff N_2 und Wasser H_2O reagiert. Die Reaktionsgleichung lautet:

$$x_1(NH)_2CO + x_2HNO_2 \to x_3CO_2 + x_4N_2 + x_5H_2O.$$

Um das Verhältnis zu bestimmen, in dem diese Reaktion stattfindet, suchen wir ganzzahlige positive Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 und x_5, die diese Gleichung erfüllen. Setzen Sie dazu $x_1 = s$ und bestimmen Sie x_2, x_3, x_4 und x_5 in Abhängigkeit von s. *(4 Punkte)*

4. Seien $S := \{\mathbf{x} \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, definiert durch $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$, für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie die Koordinaten der vier Eckpunkte des Bildes $f(S)$ an.

(b) Wählen Sie einen Punkt p im Inneren von S und berechnen Sie die Koordinaten von $f(p)$. Können Sie beschreiben, wie $f(S)$ aussieht? Skizzieren Sie S und $f(S)$.

(4 Punkte)

Abgabe: Montag 09.05.2016 bis 12:00

Mehr Aufgaben:

1. In den folgenden Gleichungssystemen seien alle vorkommenden Koeffizienten ungleich 0.

   (a) Begründen Sie geometrisch, dass ein Gleichungssystem im $\mathbb{R}^3$ der Form

   $$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= b \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 &= h \end{aligned}$$

   entweder keine oder unendlich viele Lösungen hat.

   (b) Welche Möglichkeiten gibt es für die Lösungsmenge eines Systems der Form

   $$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 &= r_1 \\ b_2x_2 + b_3x_3 &= r_2 \\ c_1x_1 + c_3x_3 &= r_3 \end{aligned}$$

   Begründen Sie ebenfalls geometrisch.

2. Sei $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ und $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sei $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch $\mathbf{v} \mapsto A_i\mathbf{v}$, für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ definierte Abbildung. Geben Sie $f_i(\mathbf{v})$ für $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.