

Assistent:

Dr. Behrouz Taji (behrouz.taji@math.uni-freiburg.de) — Sprechstunde: Di. 13 - 16 Uhr.

1. (a) Sei \mathbb{L}_0 die Lösungsmenge der Gleichung

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Geben Sie Vektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 an, so dass $\mathbb{L}_0 := \{s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 \mid s, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ und Zeigen Sie, dass die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ linear unabhängig sind. (Beachten Sie, dass die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ nicht eindeutig sind.)

- (b) Berechnen Sie die Lösungsmenge zu

$$2x_1 - x_2 = 1$$

$$3x_2 + 2x_3 = 2.$$

(4 Punkte)

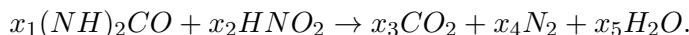
2. Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 17x_4 + 9x_5 &= 5 \\x_2 + 4x_3 + x_5 &= 6 \\3x_5 &= 6\end{aligned}\tag{1}$$

- (a) Geben Sie die Lösungsmenge \mathbb{L} von (1) in parametrisierter Form an. Entscheiden Sie, ob \mathbb{L} einen linearen oder einen affin linearen Unterraum des \mathbb{R}^5 bildet und geben Sie dessen Dimension an.
- (b) Können Sie ohne erneutes Rechnen die Lösungen des zu (1) gehörigen homogenen Systems angeben? Prüfen Sie Ihre Behauptung anhand zweier Zahlenbeispiele nach.

(4 Punkte)

3. Es sei bekannt, dass Harnstoff $(NH)_2CO$ mit salpetriger Säure HNO_2 zu Kohlendioxid CO_2 , Stickstoff N_2 und Wasser H_2O reagiert. Die Reaktionsgleichung lautet:



Um das Verhältnis zu bestimmen, in dem diese Reaktion stattfindet, suchen wir ganzzahlige positive Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 und x_5 , die diese Gleichung erfüllen. Setzen Sie dazu $x_1 = s$ und bestimmen Sie x_2, x_3, x_4 und x_5 in Abhängigkeit von s . (4 Punkte)

4. Seien $S := \{\mathbf{x} \mid 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, definiert durch $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$, für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Geben Sie die Koordinaten der vier Eckpunkte des Bildes $f(S)$ an.
- (b) Wählen Sie einen Punkt p im Inneren von S und berechnen Sie die Koordinaten von $f(p)$. Können Sie beschreiben, wie $f(S)$ aussieht? Skizzieren Sie S und $f(S)$.

(4 Punkte)

Abgabe: Montag 09.05.2016 bis 12:00

Mehr Aufgaben:

1. In den folgenden Gleichungssystemen seien alle vorkommenden Koeffizienten ungleich 0.

- (a) Begründen Sie geometrisch, dass ein Gleichungssystem im \mathbb{R}^3 der Form

$$\begin{aligned}ax_1 + bx_2 + cx_3 &= b \\ex_1 + fx_2 + gx_3 &= h\end{aligned}$$

entweder keine oder unendlich viele Lösungen hat.

- (b) Welche Möglichkeiten gibt es für die Lösungsmenge eines Systems der Form

$$\begin{aligned}a_1x_1 + a_2x_2 &= r_1 \\b_2x_2 + b_3x_3 &= r_2 \\c_1x_1 + c_3x_3 &= r_3\end{aligned}$$

Begründen Sie ebenfalls geometrisch.

2. Sei $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ und $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sei $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die durch $\mathbf{v} \mapsto A_i \mathbf{v}$, für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ definierte Abbildung. Geben Sie $f_i(\mathbf{v})$ für $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.