**Dr. Susanne Knies — Mathematik für Naturwissenschaftler — Sommer 2016**
**Blatt 4**

---

Assistant:
Dr. Behrouz Taji (behrouz.taji@math.uni-freiburg.de) — Sprechstunde: Di. 13 - 16 Uhr.

1. (a) Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Sei $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie: $L^3 = abc \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

*(4 Punkte)*

2. (a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc \neq 0$. Überprüfen Sie:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

*(Studenten, die eine gerade Matrikelnummer haben, brauchen nur $AA^{-1} = I_2$ zu zeigen solche mit einer, ungeraden Matrikelnummer, $A^{-1}A = I_2$.)*

(b) Sei $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $A_i^{-1}$, falls $A_i$ invertierbar ist.

(c) Bestimmen Sie die Inversen von $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

*(4 Punkte)*

3. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Lösen Sie das inhomogene Gleichungssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_i$$

für $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \end{pmatrix}$. *(3 Punkte)*

4. (a) Sei $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ und $A\mathbf{y} = 0$. Zeigen Sie: $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{b}$.

   (b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $A\mathbf{x} = 0$ in parametrisierter Form.

   (c) Erraten Sie eine Lösung der inhomogenen Gleichung $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, für $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und verwenden Sie Teil a) und die Lösung aus b), um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung anzugeben.

   (d) Setzen Sie in der allgemeinen Lösung aus Teil c) einen zufälligen Wert für den Parameter ein (z.B. Ihre Hausnummer) und überprüfen Sie die Richtigkeit der so erhaltenen Lösung.

*(5 Punkte)*

*Abgabe: Montag <u>23.05.2016</u> bis 12:00*

---

**Mehr Aufgaben:**

1. (a) Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

   (b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $A^2$.

2. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie die Inversen von $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Geben Sie die Lösung von

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

   in parametrisierter Form an.