Dr. Susanne Knies — Mathematik für Naturwissenschaftler — Sommer 2016
Blatt 5

Assistant:
Dr. Behrouz Taji (behrouz.taji@math.uni-freiburg.de) — Sprechstunde: Di. 13 - 16 Uhr.

1. Finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen und benutzen Sie hierfür das charakteristische Polynom.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

2. (a) Sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, für $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren in parametrisierter Form.

   (b) Berechnen Sie Eigenwert und Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(4 Punkte)

3. Die Matrix B sei gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3, 4$ Eigenvektoren der Matrix B sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an. *(4 Punkte)*

4. Sei folgende Leslie-Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0,1 & 1,4 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

   (a) Rechnen Sie nach, dass

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

   Eigenvektoren von L sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

   (b) Wie wird sich eine Population mit der Anfangsverteilung $a_0 = (39, 5, 30)$ langfristig entwickeln? **Anleitung:** Stellen Sie a_0 als Linearkombination von u, v und w dar. Mit dieser Darstellung können Sie entscheiden, wogegen $L^n a_0$ für $n \to \infty$ konvergiert. *(4 Punkte)*

5. Bestimmen Sie die Inverse von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. *(4* Punkte)*

Abgabe: Montag <u>30.05.2016</u> bis 12:00

Mehr Aufgaben:

1. Sei A eine quadratische Matrix. Erklären sie, warum λ genau dann ein Eigenwert von A ist wenn
$$\det(A - \lambda I) = 0.$$
2. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A, A^{-1}, A^2 und $A + 4I$.