

Assistent:

Dr. Behrouz Taji (behrouz.taji@math.uni-freiburg.de) — Sprechstunde: Di. 13 - 16 Uhr.

1. Eine Ellipse mit den Halbachsen a und b wird beschrieben durch

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Gegeben ist der Einheitskreis

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\},$$

sowie die Matrix $A := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Matrix A den Einheitskreis auf die Ellipse mit Halbachsen a und b abbildet, d.h. für einen beliebigen Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K$ ist zu zeigen, dass $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$ gilt.
- (b) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel

$$F_E = \det(A) F_K$$

den Flächeninhalt der Ellipse mit Halbachsen a und b . Dabei bezeichnet F_E den Flächeninhalt der Ellipse und F_K den Flächeninhalt des Einheitskreises. Welchen Flächeninhalt hat die Ellipse mit den Halbachsen $a = 3$ und $b = 5$?

(4 Punkte)

2. (a) Finden Sie durch geometrische Überlegungen eine Lösung von: $z^2 = 4 + 4i$. (Hinweis: Geben Sie Ihr Ergebnis in Polarkoordinaten an!)
- (b) Berechnen Sie $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))^{2016}$. Frage: Kann man sich das Ergebnis anschaulich erklären?

(4 Punkte)

3. Die Reaktionsgeschwindigkeit einer chemischen Reaktionsgleichung erster Ordnung wird durch die Differentialgleichung

$$y'(t) = k(a - y(t)), \quad t \geq 0$$

beschrieben mit dem Anfangswert $y(0) = 0$. $y(t)$ ist dabei die Konzentration des bis zum Zeitpunkt t umgesetzten Stoffes, a ist die Anfangskonzentration des Ausgangsstoffes und k die Reaktionskonstante.

- (a) Leiten Sie mit dem aus der Vorlesung bekannten "Ln - Trick" die Lösung $y(t)$ her.

- (b) Nun betrachten Sie eine chemische Reaktion erster Ordnung mit der Reaktionskonstanten $k = 0,1 \text{ min}^{-1}$, $a = 0,1 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$ und $y(0) = 0 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$. Wie lange dauert es, bis die Konzentration des umgesetzten Stoffes von $0 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$ auf $0,01 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$ gestiegen ist?

(4 Punkte)

4. Zeigen Sie jeweils, dass die gegebene Funktion die Differentialgleichung löst:

(a) $y(t) = e^{(t+2)}$ löst $y'(t) = y(t)$.

(b) $y(t) = \frac{1}{1-t}$ löst $y'(t) = y^2(t)$.

(c) $y(t) = \cos(\sqrt{5}t) + \sin(\sqrt{5}t)$ löst $y''(t) + 5y(t) = 0$.

(4 Punkte)

Abgabe: Montag 20.06.2016 bis 12:00

Mehr Aufgaben:

1. Verwenden Sie den "Ln-Trick" um

$$y'(t) = y(t) \cos(t),$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 3$ zu lösen.

2. Welche der folgenden Funktionen ist Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = 3t^2(y(t) + 1), \quad \forall t \in \mathbb{R}?$$

Begründen Sie Ihre Antworten!

(a) $y(t) = \exp(t^3)$.

(b) $y(t) = -1$.

(c) $y(t) = 2 \exp(t^3) - 1$.

(d) $y(t) = -1 + \frac{1}{3t^2}$.