Übungsaufgaben – Blatt 3

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Aus zwei Gold-Silber-Legierungen, in denen sich die Metallmassen wie $2:3$ bzw wie $3:7$ verhalten, sind $8kg$ einer neuen Legierung mit dem Verhältnis $5:11$ herzustellen. Wieviel Kilogramm der einzelnen Legierungen sind dabei zu verwenden?

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ mit $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ lässt sich immer als Gerade im $\mathbb{R}^2$ darstellen. Sei nun ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

gegeben, bei dem $(a_{11}, a_{12}) \neq (0,0)$ und $(a_{21}, a_{22}) \neq (0,0)$ gilt. Dann werden die Lösungen der beiden einzelnen Gleichungen durch zwei Geraden g und h beschrieben.

a) Welche mögliche Lagebeziehungen gibt es zwischen den Geraden g und h? Was kann man in den einzelnen Fällen über die Lösungen des Gleichungssystems aussagen?

b) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 4 \\ 5x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

Fertigen Sie eine Skizze der zugehörigen Geraden g und h (siehe Teil a)) an und berechnen Sie die Lösungsmenge.

c) Betrachten Sie für $\mathbf{x}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 &= r_1 \\ b_2x_2 + b_3x_3 &= r_2 \\ c_1x_1 + c_3x_3 &= r_3 \end{aligned}$$

Beschreiben Sie alle Möglichkeiten für die Lösungsmenge dieses Gleichungssystem. Begründen Sie Ihre Aussagen geometrisch.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mit den Werten

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie die Matrix-Vektor Multiplikation $\mathbf{A}\mathbf{v}_i$ für die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Gegeben ist der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{b} = (0, 5, -1)$. Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

c) Für den Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ist durch $\mathbf{A}\mathbf{v}$ eine lineare Abbildung definiert. Stellen Sie einen Zusammenhang zur Abbildung $A(\mathbf{v})$ aus Aufgabe 4, a) von Blatt 2 her.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Es sei bekannt, dass Harnstoff $(NH_2)_2CO$ mit salpetriger Säure HNO_2 zu Kohlendioxid CO_2, Stickstoff N_2 und Wasser H_2O reagiert. Die Reaktionsgleichung lautet:

$$x_1(NH_2)_2CO + x_2HNO_2 \to x_3CO_2 + x_4N_2 + x_5H_2O.$$

Um das Verhältnis zu bestimmen, in dem diese Reaktion stattfindet, suchen wir ganzzahlige positive Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 und x_5, die diese Gleichung erfüllen. Setzen Sie dazu $x_1 = s$ und bestimmen Sie x_2, x_3, x_4 und x_5 in Abhängigkeit von s.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 3

Aufgabe 1

Geben Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$$

an. Bestimmen Sie die Dimension des Lösungsraums $\mathbb{L}$.

Aufgabe 2

Wird Kaliumdichromat $K_2Cr_2O_7$ auf über $500°C$ erhitzt, zerfällt es in Kaliumchromat K_2CrO_4, Chromoxid Cr_2O_3 und Sauerstoff O_2. Die Reaktionsgleichung lautet

$$x_1K_2Cr_2O_7 \to x_2K_2CrO_4 + x_3Cr_2O_3 + x_4O_2$$

Um das Verhältnis zu bestimmen, in dem diese Reaktion stattfindet, suchen wir ganze, positive Zahlen x_1, x_2, x_3 und x_4, die diese Gleichung erfüllen. Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf, mit dem sich diese Zahlen berechnen lassen.
Hinweis: In der Reaktionsgleichung stecken drei Gleichungen, denn für jedes der drei Elemente müssen die Mengen auf beiden Seiten übereinstimmen.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Menge $S := \{\mathbf{x} \mid x_1, x_2 \in [0,1]\}$ so wie die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Sei $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung welche definiert wird durch $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{Av}$, für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

a) Geben Sie die Koordinaten der vier Eckpunkte des Bildes $\mathbf{A}(S)$ an.

b) Wählen Sie einen Punkt p im Inneren von S und berechnen Sie die Koordinaten von $\mathbf{A}(p)$. Können Sie beschreiben wie $\mathbf{A}(S)$ aussieht ? Skizzieren Sie S und $\mathbf{A}(S)$.

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis einschließlich 15. Mai 2017, 12 Uhr in den Briefkasten Ihres Tutors im Untergeschoss des Mathematischen Instituts (Eckerstr. 1).