Übungsaufgaben – Blatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen und ihre Inversen, falls sie existieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ und $\mathbf{Ay} = 0$. Zeigen Sie: $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{b}$.

b) Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $\mathbf{Ax} = 0$ in parametrisierter Form.

c) Erraten Sie eine Lösung der inhomogenen Gleichung $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, für $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, und verwenden Sie Teil a) und die Lösung aus b), um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung anzugeben.

d) Setzen Sie in der allgemeinen Lösung aus Teil c) einen zufälligen Wert für den Parameter ein (z.B. die letzten 2 Ziffern Ihrer Matrikelnummer) und überprüfen Sie die Richtigkeit der so erhaltenen Lösung.

Aufgabe 3 (4 Punkte (+ 2 Punkte))

Die durch die Drehmatrix $\mathbf{D}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegebene Abbildung dreht einen Vektor um den Winkel φ. Die durch die Spiegelmatrix $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegebene Abbildung spiegelt einen Vektor an der x_2-Achse.

a) Ist bei Hintereinanderausführung der beiden Abbildungen die Reihenfolge relevant? Begründen Sie ihre Antwort mit einer geeigneten Rechnung und einer Skizze, die die Situation veranschaulicht.

b) Skizzieren Sie das Bild des Quadrats $Q = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x, y \leq 1\}$ unter der Abbildung $\mathbf{SD}_\varphi$ und $\mathbf{D}_\varphi\mathbf{S}$ für $\varphi = 45°$.

c) Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{SD}_\varphi$ und $\mathbf{D}_\varphi\mathbf{S}$.

d) (Zusatz) Finden Sie zu gegebenem Winkel φ einen Winkel ψ so dass gilt $\mathbf{SD}_\varphi = \mathbf{D}_\psi\mathbf{S}$.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

a) Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A}$ und die Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rechnen Sie nach, dass die Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ sind und ordnen Sie diese den Eigenwerten $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$ zu.

b) Stellen Sie das charakteristische Polynome der Matrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

auf und berechnen Sie die Eigenwerte.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 4

Aufgabe 1

Gegeben sind die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{D}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinanten von $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}_\varphi$.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie:

$$\mathbf{AB}, \quad \mathbf{CD}, \quad \mathbf{DA}$$

b) Stellen Sie die charakteristischen Polynome der obigen Matrizen auf und berechnen Sie die jeweiligen Eigenwerte.

Aufgabe 3

Gegeben sind die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass gilt $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ und $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Teilen Sie sich in Ihrem Tutorat auf und bearbeiten Sie jeweils eine der beiden Gleichheiten.

b) Lösen Sie für $i = 1, 2, 3, 4$ das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_i$. Die Vektoren $\mathbf{b}_i$ sind

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis einschließlich 22. Mai 2017, 12 Uhr in den Briefkasten Ihres Tutors im Untergeschoss des Mathematischen Instituts (Eckerstr. 1).