Übungsaufgaben – Blatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Eigenvektoren in parametrisierter und normierter Form an.

b) Die Matrix $\mathbf{B}$ sie gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{B}$ und die zugehörigen Eigenwerte an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei folgende Leslie-Matrix

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0,1 & 1,4 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Rechnen Sie nach, dass

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren von $\mathbf{L}$ sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

b) Wie wird sich eine Population mit der Anfangsverteilung $\mathbf{a}_0 = (39, 5, 30)$ langfristig entwickeln?
Anleitung: Stellen Sie $\mathbf{a}_0$ als Linearkombination von $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ dar. Mit dieser Darstellung können Sie entscheiden, wogegen $\mathbf{L}^n\mathbf{a}_0$ für $n \to \infty$ konvergiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$.

b) Berechnen Sie zu gegebenem Vektor $\mathbf{a} = (-1, 4)$

$$\mathbf{A}^k\mathbf{a}$$

für $k = 1, 2, 3, 4$. Bestimmen Sie dazu α_1 und α_2, so dass sich $\mathbf{a}$ als Linearkombination der Eigenvektoren darstellen lässt:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2.$$

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der Funktionen f, g und V.

a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 \cdot x_3 + x_2$

b) $g(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$

c) $V(p, n, T) = \frac{nRT}{p}$, mit $R \in \mathbb{R}^+$

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 5

Aufgabe 1

a) Es sei $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix. Erklären Sie, warum λ genau dann ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist wenn

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

b) Betrachten Sie die Leslie Matrix $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0,1 & 1,4 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$$

und überlegen Sie sich die Bedeutung der jeweiligen Matrixeinträge.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$.

b) Berechnen Sie zu gegebenem Vektor $\mathbf{a} = (5, 2)$

$$\mathbf{A}^k \mathbf{a}$$

für $k = 1, 2, 3, 4$. Bestimmen Sie dazu α_1 und α_2, so dass sich $\mathbf{a}$ als Linearkombination der Eigenvektoren darstellen lässt:

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2.$$

Aufgabe 3

Sei $f(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{x_1} + x_2 x_1$, berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_{x_1} f$ und $\partial_{x_2} f$.

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis einschließlich 29. Mai 2017, 12 Uhr in den Briefkasten Ihres Tutors im Untergeschoss des Mathematischen Instituts (Eckerstr. 1).