Übungsaufgaben – Blatt 7

Aufgabe 1 (5 Punkte)

a) Berechnen Sie die Inverse der Folgenden komplexen Zahlen:

i) $z_1 = 3 - i$ ii) $z_2 = 5 + i$ iii) $z_3 = -4 + i$

b) Lösen Sie folgende Ausdrücke nach z auf.

i) $\frac{2-i}{z(5-3i)} = 3 - i$ ii) $(z - i)(5 + i) = -1$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerten von $\mathbf{A}$.

b) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Die komplexe Zahl z_1 ist in Polarkoordinaten gegeben durch $r = 3, \varphi = \frac{\pi}{2}$. Geben Sie z_1 in kartesischen Koordinaten an und zeichnen Sie z_1.

b) Schreiben Sie die komplexen Zahlen $z_2 = 2i$ und $z_3 = 1 - i$ in Polarkoordinaten und zeichnen Sie $z_2 \cdot z_3$.

c) Berechnen Sie $(i-1)^{11}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Fläche F werde von einer Matrix A abgebildet auf die Fläche F_A. Berechne Sie das Volumen

a) des Parallogramms, das von den Vektoren $\binom{4}{7}$ und $\binom{-2}{12}$ aufgespannt wird.

b) einer Ellipse mit den Halbachsen $\binom{3}{0}$ und $\binom{0}{2}$.

c) des Parallogramms, das durch Scherung aus dem Enheitsquadrat hervor geht.

d) einer Ellipse mit den Halbachsen $\binom{2}{2}$ und $\binom{-3}{3}$.

Hinweis: Wählen Sie zunächst eine geeigneten Ausgangsfläche F und suchen Sie anschließend die Matrix $\mathbf{A}$ passend. Verwenden Sie zur Berechnung des Volumens die Formel

$$\mathrm{Vol}(F_A) = \det(A)\,\mathrm{Vol}(F)\ .$$

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 7

Aufgabe 1

Lösen Sie die folgenden Gleichungen.

a) $2z^2 + 3z - 1 = 0$

b) $3z^2 + 2z + 1 = 0$

c) $4z^2 + 4z + 1 = 0$

d) $z^2 + 1 = 0$

e) $z^2 + z - 6 = 0$

f) $z^2 + 2z + 3 = 0$

Aufgabe 2

a) Zeichnen Sie $z_1 = 3\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right)$ und geben Sie z_1 in der Form $x + iy$ an.

b) Zeichnen Sie $z_2 = 1 + i$, $z_3 = -1 + i$, $z_4 = -1 - i$ und $z_5 = 1 - i$ und bestimmen Sie die Polarkoordinaten der Zahlen.

Aufgabe 3

Gegeben ist der Einheitskreis

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

sowie die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Die Matrix $\mathbf{A}$ bildet den Einheitskreis K auf die Ellipse mit Halbachsen der Längen a und b ab:

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

(siehe Vorlesung vom 11.05.2017)

Berechnen Sie mit Hilfe der Formel

$$\text{Vol}(E) = \text{det}(A)\text{Vol}(K)$$

den Flächeninhalt der Ellipse mit den Halbachsen der Längen 2 und 4.

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis einschließlich 19. Juni 2017, 12 Uhr in den Briefkasten Ihres Tutors im Untergeschoss des Mathematischen Instituts (Eckerstr. 1).