Übungsaufgaben – Blatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\psi \in \mathbb{R}$. In der Vorlesung wurde definiert

$$e^{i\psi} = \cos(\psi) + i\sin(\psi). \qquad (\star)$$

a) Setzen Sie in die Reihendarstellung der Exponentialfunktion (s. Skript Beispiel 4.23) $z = i\psi$ als Argument ein,

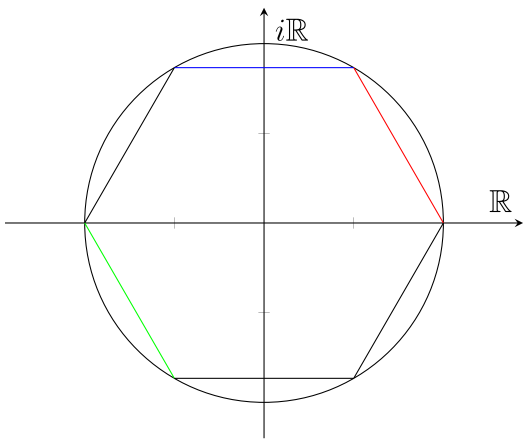
$$e^{i\psi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\psi)^k}{k!},$$

und zerlegen Sie diese Darstellung in Real- und Imaginärteil.

b) Vergleichen Sie Real- und Imaginärteil von $(\star)$ mit Ihrem Ergebnis aus (a) und leiten Sie hieraus eine Reihendarstellung für $\sin(\psi)$ und $\cos(\psi)$ ab. Vergleichen Sie diese Reihen mit der Taylorentwicklung von $\sin(\psi)$ und $\cos(\psi)$ von Übungsblatt 10 Aufgabe 1 aus dem Wintersemester.

Aufgabe 2 (4 Punkte (+2 Punkte))

Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte eines in den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks in der Form $z = e^{i\phi}$ und $z = x + iy$. Orientieren Sie sich dabei an folgender Skizze:



optional:
Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte eines in den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen ist die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2t^2\,(y(t)+1) \quad t \in \mathbb{R} \\ y(0) &= 0\ ? \end{aligned}$$

Begründen Sie Ihre Antwort durch eine geeignete Rechnung, beachten Sie insbesondere die Anfangswerte.

i) $y(t) = 2\exp(t^3) - 1$

ii) $y(t) = -1$

iii) $y(t) = \exp(\frac{2t^3}{3}) - 1$

iv) $y(t) = \sin(-t)$

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Es sei $a \in \mathbb{R}$ und die Funktion $y_a(t)$ gegeben durch:

$$y_a(t) = \frac{1}{ae^t + 1}.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$, $y_a(x)$ die Differentialgleichung

$$y'(t) = y^2(t) - y(t)$$

löst.

b) Bestimmen Sie a, so dass $y_a(t)$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y'(t) &= y^2(t) - y(t) \\ y(0) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

löst.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 8

Aufgabe 1

Gibt es noch Fragen zu komplexen Zahlen? Dann besprechen Sie diese mit Ihrem Tutor/ Ihrer Tutorin. Weitere Übungsaufgaben finden Sie auf den Zusatzblättern auf der ILIAS -Seite.

Aufgabe 2

Zeigen Sie jeweils, dass die gegebene Funktion die Differentialgleichung löst:

i) $y(t) = e^t - 2$ löst $y'(t) = y(t) + 2$

ii) $y(t) = \frac{t^2}{2}$ löst $y'(t) = t$

iii) $y(t) = \cos(t) - \sin(t)$ löst $y''(t) + y(t) = 0$

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis einschließlich 26. Juni 2017, 12 Uhr in den Briefkasten Ihres Tutors im Untergeschoss des Mathematischen Instituts (Eckerstr. 1).