
Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Zeigen Sie mithilfe der Definition, dass für alle $c \in [a, b]$ gilt:

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]}).$$

Aufgabe 2. Die parametrisierte Kurve $\gamma: (0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) := (\sin(t), \cos(t) + \log \tan(t/2))^\top$$

heißt Traktrix oder Schleppkurve. Zeigen Sie, dass für jeden Kurvenpunkt die Strecke auf der Tangente von diesem Kurvenpunkt zur y -Achse die Länge 1 hat.

Aufgabe 3. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Wir definieren die *Energie* von γ durch

$$E(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|^2 dt.$$

Zeigen Sie:

- (a) Die Energie einer parametrisierten Kurve ist nicht invariant unter Umparametrisierung.
- (b) Es gilt $L(\gamma)^2 \leq (b-a)E(\gamma)$.
- (c) In obiger Ungleichung tritt Gleichheit genau dann ein, wenn γ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass durch $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathcal{C}^\infty([a, b])$ definiert wird, und benutzen Sie ihre Kenntnisse über die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Aufgabe 4. Wir betrachten eine Kreisscheibe vom Radius 1, die im \mathbb{R}^2 auf der x -Achse mit konstanter Geschwindigkeit von links nach rechts rollt. Eine zweite Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ und demselben Mittelpunkt sei mit der ersten fest verbunden. Die parametrisierte Kurve $\gamma_r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ beschreibe den Weg, den ein Punkt auf dem Rand der zweiten Kreisscheibe zurücklegt, wobei $\gamma_r(0) = -r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt.

- (a) Finden Sie eine Formel für $\gamma_r(t)$. Überlegen Sie sich zuerst, welchen Weg der Mittelpunkt der beiden Kreisscheiben zurücklegt.
- (b) Für welche $r > 0$ ist die Kurve γ_r regulär?
- (c) Berechnen Sie für $r = 1$ die Länge von $\gamma_1|_{[0, 2\pi]}$.

Abgabe: bis Dienstag, den 02. Mai 2017 um 10 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1