Dr. Christian Miebach
Dr. Tobias Schedlmeier

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, dass für offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ gilt:

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z = \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z.$$

(b) Es sei S eine Fläche. Zeigen Sie folgende Rechenregeln für die kovariante Ableitung ∇:

(1) $\nabla\colon \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \to \mathfrak{X}(S)$ ist $\mathbb{R}$-bilinear.

(2) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ für alle $f \in C^\infty(S)$ und $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$.

(3) $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$ für alle $f \in C^\infty(S)$ und $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$.

(4) $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S)$ und die erste Fundamentalform g.

Aufgabe 2. Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte kompakte Fläche mit glattem Einheitsnormalenfeld $N\colon S \to S^2$.

(a) Es seien $E \subset \mathbb{R}^3$ eine affine Ebene mit $E \cap S = \emptyset$ und $f\colon S \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ definiert durch $f(p) := d(p, E)$. Zeigen Sie: Die Funktion f ist glatt auf S und in jedem kritischen Punkt $p \in S$ von f gilt $T_pS = E$. *Hinweis*: Wählen Sie ein lineares Koordinatensystem auf $\mathbb{R}^3$, so dass $E = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2$ gilt.

(b) Folgern Sie, dass für die Gauß-Abbildung $N\colon S \to S^2$ gilt: $N\big(\{p \in S;\ K(p) \geq 0\}\big) = S^2$. *Hinweis:* Zu $q \in S^2$ betrachten Sie Translationen des Vektorraums $q^\perp$.

(c) Folgern Sie: Ist $N\colon S \to S^2$ injektiv, so gilt $K \geq 0$.

Aufgabe 3. (a) Berechnen Sie die Christoffelsymbole der Sphäre S^2 in der Parametrisierung von S^2 durch sphärische Koordinaten.

(b) Berechnen Sie die kovariante Ableitung der Vektorfelder $X(x,y,z) = (xy^2, -x^2y, 0)$ und Y, wobei $Y(p)$ die orthogonale Projektion von $(1,1,1)$ auf T_pS^2 ist.

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$, $f(x,y) = (\cos(x), \sin(x), y)$, eine lokale Isometrie ist.

(b) Es seien S_1 und S_2 Flächen und $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Isometrie mit $F(S_1) = S_2$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von F auf S_1 eine Isometrie $F|_{S_1}\colon S_1 \to S_2$ ist.

(c) Geben Sie zwei Flächen S_1 und S_2 sowie eine Isometrie $S_1 \to S_2$ an, die nicht die Einschränkung einer globalen Isometrie des $\mathbb{R}^3$ ist.

Abgabe: bis Dienstag, den 11. Juli 2017 um 12:15 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1