Dr. Christian Miebach
Dr. Tobias Schedlmeier

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1. Wir betrachten die Flächen S_1 und S_2, die durch die Parametrisierungen

$$\begin{aligned} F_1(x,y) &= (x\cos y, x\sin y, \log x),\\ F_2(x,y) &= (x\cos y, x\sin y, y) \end{aligned}$$

gegeben sind. Zeigen Sie, dass S_1 und S_2 überall gleiche Gaußkrümmung haben, jedoch $F_2 \circ F_1^{-1}$ keine Isometrie ist. Die Umkehrung des Theorema egregium ist also falsch.

Aufgabe 2. Es sei $\varphi\colon S_1 \to S_2$ ein Diffeomorphismus zwischen zwei Flächen.

(a) Zeigen Sie: Ist $F\colon U \to V$ eine lokale Parametrisierung von S_1 um einen Punkt $p \in S_1$, so ist $\varphi \circ F$ eine lokale Parametrisierung um $\varphi(p) \in S_2$.

(b) Beweisen Sie, dass φ genau dann lokal um p eine Isometrie ist, wenn die unter F zurückgezogene erste Fundamentalform g_{S_1} von S_1 mit der unter $\varphi\circ F$ zurückgezogenen ersten Fundamentalform g_{S_2} von S_2 übereinstimmt.

(c) Zeigen Sie, dass es keine Fläche gibt, deren zurückgezogene erste und zweite Fundamentalformen durch $g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $h(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ gegeben sind.

Aufgabe 3. Eine glatte Abbildung $\varphi\colon S_1 \to S_2$ heißt *konform*, wenn für alle $p \in S_1$ und alle $v, w \in T_pS_1$ gilt:

$$g^{S_2}_{\varphi(p)}\big(d\varphi_p(v), d\varphi_p(w)\big) = \lambda^2(p) g^{S_1}_p(v,w),$$

wobei λ^2 eine differenzierbare Funktion auf S ist, die nirgends verschwindet.

(a) Beweisen Sie, dass jede konforme Abbildung ein lokaler Diffeomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass die stereographische Projektion der Sphäre ohne den Nordpol in die Ebene ein konformer Diffeomorphismus ist.

(c) Eine glatte Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ erfüllt die *Cauchy-Riemann-Gleichungen*, wenn $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Beweisen Sie, dass ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ genau dann konform bezüglich der euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^2$ ist, wenn φ die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt.

Aufgabe 4. Eine Abbildung $\varphi\colon S_1 \to S_2$ heißt winkeltreu, wenn für alle $p \in S_1$ und alle $v, w \in T_p(S_1)$ gilt:

$$\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|} = \frac{\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w)\rangle}{\|d\varphi_p(v)\|\|d\varphi_p(w)\|}.$$

Zeigen Sie, dass ein Diffeomorphismus zwischen zwei Flächen genau dann konform ist, wenn er winkeltreu ist.

Abgabe: bis Dienstag, den 18. Juli 2017 um 12:15 Uhr in den Briefkästen im UG der Eckerstr. 1